Exercice 1

8,5 points

1) Le passage d'une personne au portique est une épreuve de Bernoulli dont le succès « le portique sonne » a pour probabilité $p = 0{,}021$.
On répète cette épreuve 80 fois, de façon identique, et on considère les passages indépendants les uns des autres.
X compte le nombre de succès lors de ces 80 épreuves, donc X suit la loi binomiale

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0{,}021)}.$$

2) $E(X) = np = 80 \times 0{,}021$, soit $\boxed{E(X) = 1{,}68}$.
Interprétation : sur un grand nombre de groupes de 80 personnes, le portique sonne en moyenne $1{,}68$ fois par groupe.

3) **a.** $P(X = 4) = \binom{80}{4} \times 0{,}021^4 \times 0{,}979^{76} = 1\,581\,580 \times 0{,}021^4 \times 0{,}979^{76}$, soit

$$\boxed{P(X = 4) \approx 0{,}061}.$$

b. « Au maximum 5 personnes » correspond à l'événement $\{X \leqslant 5\}$. À la calculatrice (fonction de répartition de la loi binomiale) :

$$\boxed{P(X \leqslant 5) \approx 0{,}993}.$$

c. « Au moins 4 personnes » correspond à $\{X \geqslant 4\}$, événement contraire de $\{X \leqslant 3\}$:

$$P(X \geqslant 4) = 1 - P(X \leqslant 3) \approx 1 - 0{,}9119, \qquad \boxed{P(X \geqslant 4) \approx 0{,}088}.$$

4) On calcule les valeurs de la fonction de répartition à la calculatrice :

k	0	1	2	3
$P(X \leqslant k)$	$\approx 0{,}1831$	$\approx 0{,}4972$	$\approx 0{,}7634$	$\approx 0{,}9119$

$P(X \leqslant 2) \approx 0{,}763 < 0{,}9$ et $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}912 \geqslant 0{,}9$; la fonction $k \mapsto P(X \leqslant k)$ étant croissante, le plus petit entier cherché est $\boxed{k = 3}$.

Exercice 2

11,5 points

1) **a.** $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty}$.

b. g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
Pour $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 = 1$ (la fonction exponentielle est croissante), donc $g'(x) \geqslant 0$, avec égalité seulement en 0.
Donc $\boxed{g \text{ est croissante sur } [0\,;+\infty[}$.

c. g est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $g(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1$. Donc, pour tout $x \geqslant 0$:

$$g(x) \geqslant g(0) \iff \mathrm{e}^x - x \geqslant 1 \iff \boxed{\mathrm{e}^x \geqslant x + 1}.$$

d. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ et, pour tout $x\geqslant 0$, $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$.
Par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty}$: c'est le résultat annoncé au **a.**

2) On détermine la forme de chaque limite :

- **a.** en $+\infty$: $x\to+\infty$ et $\mathrm{e}^x\to+\infty$, donc $x\mathrm{e}^x\to+\infty$ par produit : **pas** de forme indéterminée ;
- **b.** en $-\infty$: $x\to-\infty$ et $\mathrm{e}^x\to 0$: forme indéterminée « $\infty\times 0$ », levée par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^x=0$;
- **c.** en $+\infty$: forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », levée par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$;
- **d.** en $-\infty$: $\mathrm{e}^x\to 0$ et $x\to-\infty$, donc $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\to 0$ par quotient : **pas** de forme indéterminée.

Les limites concernées sont **b.** et **c.**

3) **a.** En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ et, en posant $X=-x$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\mathrm{e}^X=+\infty$.
Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty}$.

b. Pour tout réel x, $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.
Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$, donc par inverse $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.
Interprétation graphique : la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

c. $f=uv$ avec $u(x)=x$, $u'(x)=1$, $v(x)=\mathrm{e}^{-x}$, $v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$; f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=1\times\mathrm{e}^{-x}+x\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x},\qquad \boxed{f'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x}}.$$

d. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x}>0$, donc $f'(x)$ a le signe de $1-x$: positif sur $]-\infty\,;1]$, négatif sur $[1\,;+\infty[$, nul en 1.
$f(1)=1\times\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

e. La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y=f'(0)(x-0)+f(0)$.
$f(0)=0\times\mathrm{e}^0=0$ et $f'(0)=(1-0)\mathrm{e}^0=1$, donc la tangente a pour équation $\boxed{y=x}$.

Problème facultatif

hors barème

Deux cercles. Notons O_1 et O_2 les centres des cercles de rayons r_1 et r_2 (on suppose $r_1 \leqslant r_2$, comme sur la figure).

- Un rayon est perpendiculaire à la tangente au point de contact : $(O_1A) \perp (AB)$ et $(O_2B) \perp (AB)$, avec $O_1A = r_1$ et $O_2B = r_2$.
- Les deux cercles sont tangents extérieurement, donc $O_1O_2 = r_1 + r_2$.
- Soit H le point du segment $[O_2B]$ tel que $BH = r_1$. Le quadrilatère $ABHO_1$ a trois angles droits : c'est un rectangle, donc $O_1H = AB$, $(O_1H) \perp (O_2B)$ et $O_2H = r_2 - r_1$.

Dans le triangle O_1HO_2 rectangle en H, le théorème de Pythagore donne :

$$AB^2 = O_1H^2 = O_1O_2^2 - O_2H^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2 = 4r_1r_2, \qquad \boxed{AB^2 = 4r_1r_2}.$$

Trois cercles. Soient A, B, C les points de contact avec la droite des cercles de rayons r_1, r_2, r_3 ; le petit cercle est coincé entre les deux autres, donc C est sur le segment $[AB]$ et $AB = AC + CB$.
En appliquant le résultat précédent à chaque paire de cercles tangents :

$$AB = 2\sqrt{r_1r_2}, \qquad AC = 2\sqrt{r_1r_3}, \qquad CB = 2\sqrt{r_3r_2}.$$

Donc $2\sqrt{r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_3} + 2\sqrt{r_2r_3}$. En divisant par $2\sqrt{r_1r_2r_3} > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}}.$$

Exemple de contrôle : pour $r_1 = 4$ et $r_2 = 9$, on trouve $\dfrac{1}{\sqrt{r_3}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$, soit $r_3 = \dfrac{36}{25}$.