Calculatrice autorisée

Exercice 1

8,5 points

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On considère que, pour chaque personne, la probabilité que le portique sonne est de $0{,}021$.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique parmi les 80 personnes de ce groupe.

1) Justifier que la variable X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

3) Calculer les probabilités suivantes ; on arrondira les résultats à 10^{-3} près :

- **a.** la probabilité qu'exactement 4 personnes fassent sonner le portique ;
- **b.** la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique ;
- **c.** la probabilité qu'au moins 4 personnes fassent sonner le portique.

4) Donner la valeur du plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}9$.

Exercice 2

11,5 points

1) Démonstration de cours

- **a.** Rappeler la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$.

Nous allons démontrer ce résultat.
On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x$.

- **b.** Étudier le sens de variation de g sur son ensemble de définition.
- **c.** En déduire que, pour tout réel x positif : $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.
- **d.** Conclure (penser à ce que l'on cherche à démontrer).

2) Parmi les limites suivantes, lesquelles présentent une forme indéterminée levée par les formules de croissances comparées ?

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^x$ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x$ **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ **d.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

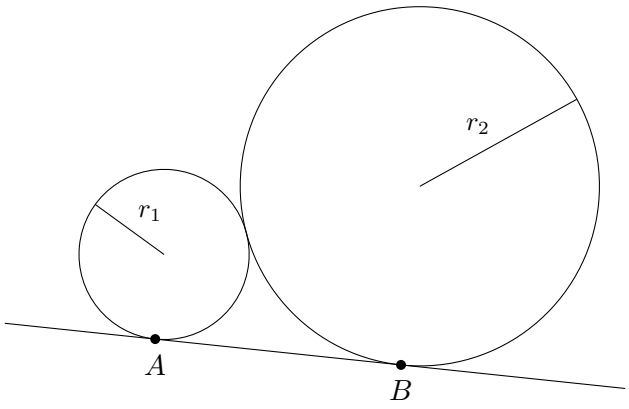
- **a.** Calculer la limite de f en $-\infty$.
- **b.** Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement ce résultat.
- **c.** Démontrer que, pour tout réel x : $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
- **d.** Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- **e.** Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

Problème facultatif

hors barème

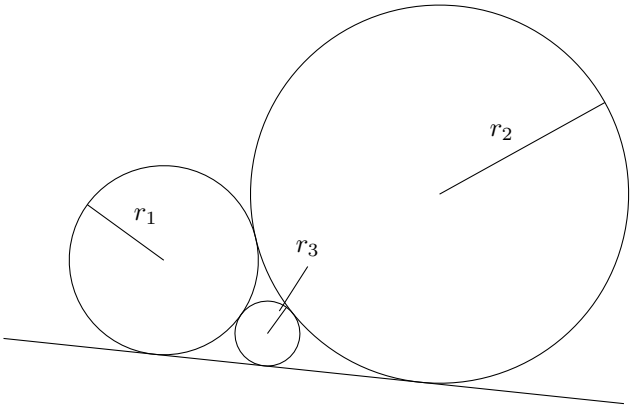
Les *sangaku* sont des tablettes sur lesquelles sont dessinés des problèmes géométriques. Ces tablettes étaient affichées à l'entrée de certains temples au Japon. Celle-ci date de 1820.

Deux cercles



Les deux cercles sont tangents à la droite, respectivement en A et B.
Démontrer que $AB^2 = 4r_1r_2$.

Trois cercles



Les trois cercles sont tangents à la droite et tangents entre eux deux à deux.
Démontrer la relation :

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$