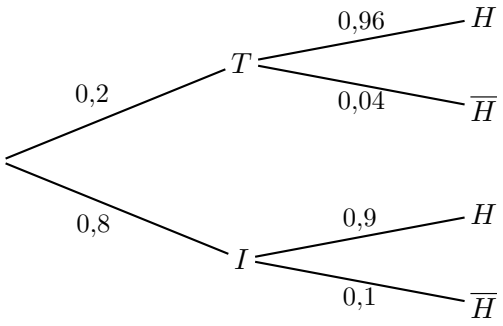
Exercice 1

10 points

1) D'après l'énoncé : $P(T) = 0{,}2$, donc $P(I) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$; $4\,\%$ des clients ayant réservé par téléphone ne viennent pas, donc $P_T(\overline{H}) = 0{,}04$ et $P_T(H) = 0{,}96$; de même $P_I(\overline{H}) = 0{,}1$ et $P_I(H) = 0{,}9$.



T et I forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(H) = P(T \cap H) + P(I \cap H) = P(T) \times P_T(H) + P(I) \times P_I(H)$$
$$= 0{,}2 \times 0{,}96 + 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}192 + 0{,}72 = \boxed{0{,}912}.$$

2) On cherche $P_H(I)$:

$$P_H(I) = \frac{P(I \cap H)}{P(H)} = \frac{0{,}72}{0{,}912} \approx \boxed{0{,}789}.$$

Environ $78{,}9\,\%$ des clients présents ont réservé par internet.

3) Pour chacune des 107 réservations, on considère l'épreuve « le client se présente-t-il à l'hôtel ? », qui n'a que deux issues : le succès H, de probabilité $p = P(H) = 0{,}912$, et l'échec $\overline{H}$. C'est une épreuve de Bernoulli.
Ces 107 épreuves sont identiques et indépendantes, et X compte le nombre de succès. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 107$ et $p = 0{,}912$:

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(107\,;\,0{,}912)}.$$

4) On cherche $P(X = 107)$:

$$P(X = 107) = \binom{107}{107} \times 0{,}912^{107} \times 0{,}088^{0} = 0{,}912^{107} \approx \boxed{0{,}00005}.$$

(On trouve $0{,}912^{107} \approx 5{,}24 \times 10^{-5}$.)

5) Il y a surréservation lorsque $X \geqslant 101$:

$$P(X \geqslant 101) = 1 - P(X \leqslant 100) \approx 1 - 0{,}8408 \approx \boxed{0{,}16}.$$

Le directeur a environ $16\,\%$ de risque de se retrouver en surréservation.

6) Si le directeur accorde n réservations ($n \geqslant 100$), le nombre X_n de clients qui se présentent suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,0{,}912)$, pour les mêmes raisons qu'à la question 3. Tous les clients ont une chambre lorsque $X_n \leqslant 100$; on cherche donc le plus grand entier n tel que $P(X_n \leqslant 100) \geqslant 0{,}99$. À la calculatrice (pour $n \leqslant 100$, c'est certain) :

n	101	102	103	104	105
$P(X_n \leqslant 100) \approx$	0,9999	0,9991	0,9955	0,9845	0,9594

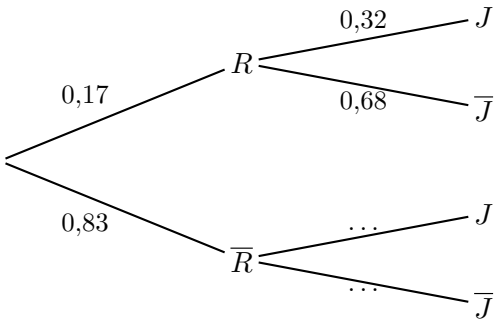
La probabilité diminue quand n augmente ; elle vaut environ $0{,}9955 \geqslant 0{,}99$ pour $n = 103$ et environ $0{,}9845 < 0{,}99$ pour $n = 104$.
Le directeur doit accorder au maximum $\boxed{103 \text{ réservations}}$.

Exercice 2

10 points

Partie A

1) D'après l'énoncé : $P(R) = 0{,}17$, $P(\overline{R}) = 0{,}83$, $P_R(J) = 0{,}32$ et $P_R(\overline{J}) = 0{,}68$. Les probabilités conditionnelles sachant $\overline{R}$ ne sont pas encore connues (elles sont calculées à la question 4).



2) $P(R \cap J) = P(R) \times P_R(J) = 0{,}17 \times 0{,}32 = 0{,}0544 \approx \boxed{0{,}054}$.

3) On sait que $P(J) = 0{,}11$. R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(J) = P(R \cap J) + P(\overline{R} \cap J) \iff P(\overline{R} \cap J) = P(J) - P(R \cap J).$$

D'où $P(\overline{R} \cap J) = 0{,}11 - 0{,}0544 = 0{,}0556 \approx \boxed{0{,}056}$.

4) La proportion cherchée est $P_{\overline{R}}(J)$:

$$P_{\overline{R}}(J) = \frac{P(\overline{R} \cap J)}{P(\overline{R})} = \frac{0{,}0556}{0{,}83} \approx \boxed{0{,}067}.$$

Environ $6{,}7\,\%$ des utilisateurs non réguliers ont entre 18 et 24 ans. Sur l'arbre, la branche $\overline{R} \to J$ porte environ $0{,}067$ et la branche $\overline{R} \to \overline{J}$ environ $0{,}933$.

5) On cherche $P_{\overline{J}}(\overline{R})$. On a $P(\overline{J}) = 1 - 0{,}11 = 0{,}89$ et

$$P(\overline{R} \cap \overline{J}) = P(\overline{R}) - P(\overline{R} \cap J) = 0{,}83 - 0{,}0556 = 0{,}7744.$$

Donc

$$P_{\overline{J}}(\overline{R}) = \frac{P(\overline{R} \cap \overline{J})}{P(\overline{J})} = \frac{0{,}7744}{0{,}89} \approx \boxed{0{,}870}.$$

Partie B

1) Pour chacune des 80 personnes interrogées, on considère l'épreuve à deux issues : succès « la personne utilise régulièrement les transports en commun », de probabilité $p = P(R) = 0{,}17$, ou échec. C'est une épreuve de Bernoulli.
Le recensement est assimilé à un tirage avec remise : les 80 épreuves sont identiques et indépendantes. X compte le nombre de succès, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}17$:

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0{,}17)}.$$

2)

$$P(X = 5) = \binom{80}{5} \times 0{,}17^5 \times 0{,}83^{75} \approx \boxed{0{,}003}.$$

La probabilité que, parmi les 80 personnes interrogées, exactement 5 utilisent régulièrement les transports en commun est d'environ $0{,}003$, soit $0{,}3\,\%$: c'est très peu probable.

3)

$$P(X = 75) = \binom{80}{75} \times 0{,}17^{75} \times 0{,}83^5 \approx 1{,}8 \times 10^{-51},$$

soit, arrondie à 10^{-3} près, $P(X = 75) \approx \boxed{0{,}000}$: cet événement est pratiquement impossible.

4) « Moins de 26 » signifie $X \leqslant 25$. À la calculatrice :

$$P(X < 26) = P(X \leqslant 25) \approx 0{,}999.$$

Comme $0{,}999 > 0{,}95$, $\boxed{\text{l'affirmation du recenseur est vraie}}$.

5) Le nombre moyen est l'espérance de X :

$$E(X) = n \times p = 80 \times 0{,}17 = \boxed{13{,}6}.$$

En moyenne, sur 80 personnes interrogées, environ $13{,}6$ utilisent régulièrement les transports en commun.