Calculatrice autorisée

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche seront valorisées.

Exercice 1

10 points

Le directeur d'un hôtel veut louer toutes ses chambres. Il a instauré un système de réservations et a remarqué que $20\,\%$ des clients réservent par téléphone, les autres utilisent internet.

Certains clients ayant réservé ne viennent pas ; cela concerne $4\,\%$ des clients ayant réservé par téléphone et $10\,\%$ des clients ayant réservé par internet.

On considère une réservation prise au hasard. On note :

- T : « la réservation a été faite par téléphone » ;
- I : « la réservation a été faite par internet » ;
- H : « le client se présente à l'hôtel ».

1) Représenter la situation par un arbre de probabilité. Montrer que $P(H) = 0{,}912$.

2) On considère un client présent dans l'hôtel. Déterminer la probabilité qu'il ait réservé par internet (le résultat sera arrondi au millième).

3) Le directeur sait qu'il ne peut accueillir que 100 clients, mais il a accordé 107 réservations. Soit X la variable aléatoire qui dénombre les clients qui se présentent à l'hôtel. On admet que les clients se présentent ou non indépendamment les uns des autres.
Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

4) Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-5} près, que les 107 clients se présentent à l'hôtel.

5) Déterminer la probabilité, arrondie au centième, que le directeur se retrouve en situation de sur-réservation (c'est-à-dire qu'au moins 101 clients se présentent à l'hôtel).

6) Déterminer le nombre maximum de réservations que doit accorder le directeur pour être certain à $99\,\%$ que tous les clients qui se présenteront à l'hôtel aient une chambre.

Exercice 2

10 points

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} près.

D'après une étude, les utilisateurs réguliers des transports en commun représentent $17\,\%$ de la population française. Parmi ces utilisateurs réguliers, $32\,\%$ sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

Partie A

On interroge une personne au hasard. On note :

- R l'événement : « la personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun » ;
- J l'événement : « la personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2) Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.
3) D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent $11\,\%$ de la population française. Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est $0{,}056$.
4) En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.
5) Sachant que la personne interrogée n'est pas âgée de 18 à 24 ans, déterminer la probabilité que la personne interrogée n'utilise pas régulièrement les transports en commun.

Partie B

Lors d'un recensement de la population française, un recenseur interroge au hasard 80 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun. La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.

Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 80 personnes interrogées.

1) Déterminer, en justifiant, la loi de X en précisant ses paramètres.
2) Calculer $P(X = 5)$, puis interpréter le résultat.
3) Déterminer la probabilité que 75 personnes utilisent régulièrement les transports en commun parmi les 80 personnes interrogées.
4) Le recenseur indique qu'il y a plus de $95\,\%$ de chances pour que, parmi les 80 personnes interrogées, moins de 26 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
5) Déterminer le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 80 personnes interrogées.