Exercice 1

2,5 points

1) P contient 7 éléments et Q en contient 4. Un élément de $P \times Q$ est un couple $(p\,;\,q)$ avec $p \in P$ et $q \in Q$: 7 choix pour la première composante, 4 pour la seconde (principe multiplicatif), donc

$$\text{Card}(P \times Q) = 7 \times 4 = \boxed{28}.$$

2) Un couple $(x\,;\,y)$ appartient à $P \times Q$ lorsque $x \in P$ et $y \in Q$, et à $Q \times P$ lorsque $x \in Q$ et $y \in P$.
Il appartient aux deux exactement lorsque x et y sont tous les deux dans $P \cap Q = \{5\,;\,6\}$.
Il existe donc des couples communs : Léa se trompe. Ce sont les couples de $(P \cap Q) \times (P \cap Q)$:

$$\boxed{(5\,;\,5),\ (5\,;\,6),\ (6\,;\,5),\ (6\,;\,6)}.$$

3) $P \cap Q = \{5\,;\,6\}$, donc $\text{Card}(P \cap Q) = 2$. D'après la formule

$$\text{Card}(P \cup Q) = \text{Card}(P) + \text{Card}(Q) - \text{Card}(P \cap Q) = 7 + 4 - 2 = \boxed{9}.$$

On le vérifie : $P \cup Q = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9\}$.

Exercice 2

2,5 points

1) Un caractère est déterminé par l'état de chacun des 6 points, et chaque point a 2 états possibles (plat ou en relief). Il y a donc $2^6 = 64$ cellules possibles, c'est-à-dire le nombre de 6-uplets d'éléments de $\{\text{plat}\,;\,\text{relief}\}$.
Parmi elles, une seule n'a aucun point en relief (tous les points plats) ; elle est exclue. Le nombre de caractères en Braille est donc

$$2^6 - 1 = \boxed{63}.$$

2) Un caractère avec exactement trois points en relief est déterminé par le choix des 3 points en relief parmi les 6, sans ordre : c'est une combinaison de 3 éléments parmi 6. Il y en a

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{20}.$$

Exercice 3

5 points

1) Pincer les 6 cordes l'une après l'autre, chacune une fois, revient à ranger les 6 cordes dans un ordre : c'est une permutation de 6 éléments. Il y a

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \boxed{720} \text{ manières.}$$

2) Les boules sont extraites sans remise et rangées dans l'ordre de sortie : l'ordre compte et les boules sont distinctes (couleurs différentes). Une rangée est un arrangement de 3 éléments parmi 11 :

$$11 \times 10 \times 9 = \frac{11!}{8!} = \boxed{990} \text{ rangées.}$$

3) Pour $n \geqslant 2$: $\binom{n+1}{2} = \dfrac{(n+1)n}{2}$ et $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{2} = 2\binom{n}{2} &\iff \frac{(n+1)n}{2} = n(n-1)\\ &\iff (n+1)n = 2n(n-1) \quad \text{on multiplie par } 2\\ &\iff n+1 = 2(n-1) \quad \text{on divise par } n \neq 0\\ &\iff n = 3.\end{aligned}$$

$n = 3$ vérifie bien $n \geqslant 2$: $\boxed{n = 3}$.
Vérification : $\binom{4}{2} = 6$ et $2\binom{3}{2} = 2 \times 3 = 6$.

4) Les deux mots ont 6 lettres.

- BANANE contient deux A, deux N, et les lettres B et E une fois chacune. Si les 6 lettres étaient toutes distinctes, il y aurait $6!$ mots ; mais échanger entre eux les deux A ($2!$ façons) ou les deux N ($2!$ façons) ne change pas le mot. Le nombre de mots formés avec ces lettres est donc
$$\frac{6!}{2! \times 2!} = \frac{720}{4} = 180.$$
- CERISE contient deux E et quatre autres lettres toutes différentes (C, R, I, S). Le nombre de mots formés est
$$\frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360.$$

En retirant le mot lui-même (une anagramme place les lettres dans un *autre* ordre), on obtient 179 anagrammes pour BANANE et 359 pour CERISE. Ces nombres sont différents : $\boxed{\text{Léa a tort.}}$

Exercice 4

5,5 points

1) Pour $n \geqslant 1$, on factorise par le terme de plus haut degré :

$$x_n = n^2\left(3 - \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}\right).$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{n^2} = 0$, donc la parenthèse tend vers 3 ; et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$. Par produit,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty}.$$

2) **a.** Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= \frac{3(n+1)}{n+2} - \frac{3n}{n+1} = \frac{3(n+1)^2 - 3n(n+2)}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{3(n^2+2n+1-n^2-2n)}{(n+1)(n+2)} = \frac{3}{(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

Comme $(n+1)(n+2) > 0$, on a $v_{n+1} - v_n > 0$: la suite (v_n) est $\boxed{\text{strictement croissante}}$.

b. Pour $n \geqslant 1$, on divise numérateur et dénominateur par n : $v_n = \dfrac{3}{1+\dfrac{1}{n}}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, le dénominateur tend vers 1 et, par quotient, la suite (v_n) est convergente :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 3}.$$

c. L'affirmation est fausse. Contre-exemple : la suite (v_n) est croissante (question a.) mais elle converge vers 3 (question b.) ; elle ne diverge donc pas vers $+\infty$.
(On peut d'ailleurs remarquer que $v_n = 3 - \dfrac{3}{n+1} < 3$: la suite est majorée par 3.)

3) a. Pour tout entier naturel n non nul, $(-1)^n$ vaut 1 ou -1, donc

$$\begin{aligned} -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 &\iff 2 \leqslant (-1)^n + 3 \leqslant 4 && \text{on ajoute } 3 \\ &\iff \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{(-1)^n+3}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{4}{\sqrt{n}} && \text{on divise par } \sqrt{n} > 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{4}{\sqrt{n}}}$ pour tout $n \geqslant 1$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{n}} = 0$.
La suite (w_n) est encadrée par deux suites qui ont la même limite 0. D'après le théorème des gendarmes, (w_n) converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = 0}.$$

Exercice 5

4,5 points

1) a. Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n \geqslant 1$ ».
Initialisation. $u_0 = 13 \geqslant 1$: $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \geqslant 1$. Alors

$$\begin{aligned} u_n \geqslant 1 &\iff \frac{1}{5}u_n \geqslant \frac{1}{5} && \text{on multiplie par } \tfrac{1}{5} > 0 \\ &\iff \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \geqslant \frac{1}{5} + \frac{4}{5} && \text{on ajoute } \tfrac{4}{5} \\ &\iff u_{n+1} \geqslant 1. \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est donc vraie.
Conclusion. $P(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire : par récurrence, $\boxed{u_n \geqslant 1}$ pour tout entier naturel n.

b. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}u_n = \frac{4}{5}(1-u_n).$$

D'après la question a., $u_n \geqslant 1$, donc $1 - u_n \leqslant 0$ et $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente.

2) On écrit $u_n = 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$. Par produit et somme :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}.$$

3) **a.** Pour tout entier naturel n, on sépare la somme en deux :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 + 12\left(\frac{1}{5}\right)^k\right) = \sum_{k=0}^{n} 1 + 12\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k.$$

La première somme compte $n+1$ termes égaux à 1 ; la seconde est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{5} \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right).$$

Donc

$$\boxed{S_n = n + 1 + 15\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)}.$$

Vérification : $S_0 = 1 + 15 \times \frac{4}{5} = 13 = u_0$ et $S_1 = 2 + 15 \times \frac{24}{25} = \frac{82}{5} = 13 + \frac{17}{5} = u_0 + u_1$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = 0$ car $-1 < \frac{1}{5} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 15\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) = 15$; et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$. Par somme :

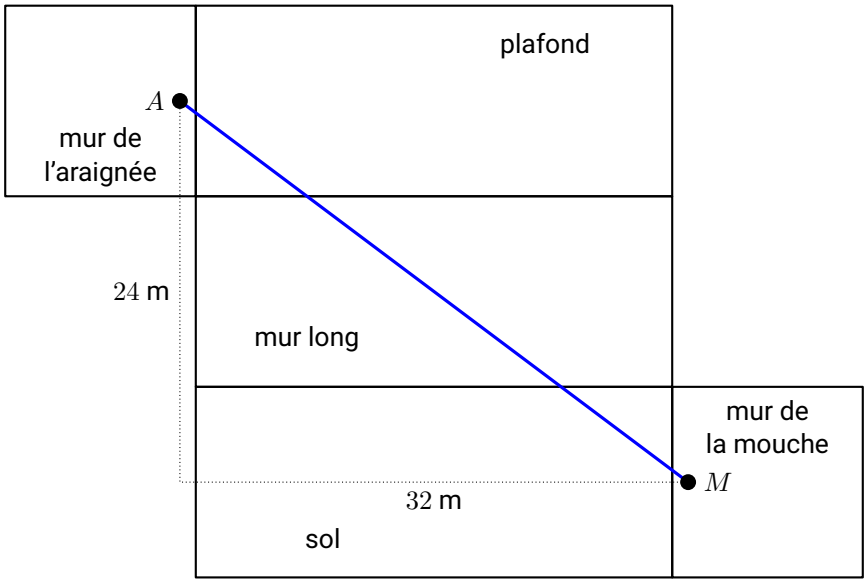
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}.$$

Exercice facultatif

hors barème

Le chemin de la mouche ($11+30+1=42$ mètres) n'est pas le plus court. Pour comparer les chemins tracés sur les parois, on **déplie** le hangar à plat : sur le patron, un chemin le long des parois devient une ligne brisée, et le plus court est un segment.

On repère le hangar ainsi : longueur 30 m, largeur et hauteur 12 m ; l'araignée A est sur le mur carré de gauche, au milieu, à 1 m du plafond ; la mouche M est sur le mur carré de droite, au milieu, à 1 m du sol. On déplie, autour d'un mur long, le plafond (au-dessus), le mur de l'araignée (collé au plafond), le sol (en dessous) et le mur de la mouche (collé au sol) :



Sur ce patron, A est à 1 m à gauche du bord du plafond et à $6+12=18$ m au-dessus de l'arête commune au mur long et au sol (6 m pour atteindre le milieu du mur de l'araignée, 12 m de mur long) ; M est à 1 m à droite du bord du sol et à 6 m sous cette même arête. L'écart horizontal entre A et M vaut $1+30+1=32$ m et l'écart vertical $18+6=24$ m. Le segment $[AM]$ reste sur le patron (il traverse successivement le mur de l'araignée, le plafond, le mur long, le sol et le mur de la mouche), et d'après le théorème de Pythagore :

$$AM=\sqrt{32^2+24^2}=\sqrt{1\,024+576}=\sqrt{1\,600}=40 \text{ m}.$$

À 1 mètre par seconde, l'araignée met 40 secondes : elle arrive avant les 41 secondes, la mouche n'avait aucune chance.