Calculatrice interdite

Exercice 1

2,5 points

Pour un ensemble fini X, on note $\text{Card}(X)$ son nombre d'éléments. Soit $P = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\}$ et $Q = \{5\,;\,6\,;\,8\,;\,9\}$.

1) Calculer $\text{Card}(P \times Q)$.

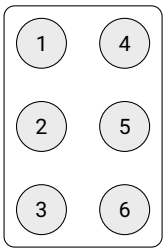
2) Léa soutient qu'aucun couple n'appartient à la fois à $P \times Q$ et à $Q \times P$. Qu'en pensez-vous ? Si elle se trompe, donner tous les couples communs.

3) Calculer $\text{Card}(P \cup Q)$.

Exercice 2

2,5 points

Louis Braille (1809 – 1852) a inventé un alphabet permettant aux personnes aveugles et malvoyantes de lire grâce au toucher : c'est l'alphabet Braille. Chaque caractère est une cellule composée de six points (voir l'illustration ci-contre). Chaque point peut être « plat » ou en relief. Par exemple, la lettre « m » s'écrit ainsi : ⠍ : les points 1, 3 et 4 sont en relief, les autres sont « plats ».



1) Tous les caractères en Braille comportent au moins un point en relief. Sachant cela, combien peut-on former de caractères en Braille ?

2) Combien de caractères contiennent exactement trois points en relief ?

Exercice 3 *(questions variées)*

5 points

1) Une guitare possède 6 cordes. De combien de manières différentes peut-on pincer successivement ses six cordes, chacune une seule fois ?

2) Une urne renferme 11 boules toutes de couleurs différentes. On en extrait trois successivement, sans remise, et on les dispose en ligne dans l'ordre de sortie. Combien de rangées différentes obtient-on ?

3) Pour un entier naturel $n \geqslant 2$, trouver la valeur de n vérifiant $\binom{n+1}{2} = 2\binom{n}{2}$.

4) Léa, toujours elle, prétend que l'on peut écrire autant d'anagrammes[1] avec le mot BANANE qu'avec le mot CERISE. A-t-elle raison ?

1. Une anagramme d'un mot est obtenue en plaçant ses lettres dans un autre ordre, que le résultat ait un sens ou non : LIRA, par exemple, est une anagramme de RAIL.

Exercice 4

5,5 points

1) Déterminer la limite de la suite de terme général $x_n = 3n^2 - 5n + 7$.

2) On considère la suite (v_n) telle que, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{3n}{n+1}$.

- **a.** Démontrer que la suite (v_n) est croissante.
- **b.** La suite (v_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
- **c.** L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse : « Toute suite croissante diverge vers $+\infty$ » ? Justifier la réponse.

3) On considère la suite (w_n) telle que, pour tout entier naturel non nul n, $w_n = \dfrac{(-1)^n + 3}{\sqrt{n}}$.

- **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{4}{\sqrt{n}}$.
- **b.** En déduire que (w_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 5

4,5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5}$.

1)

- **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant 1$.
- **b.** En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
- **c.** La suite (u_n) est-elle convergente ?

2) On admet que, pour tout entier naturel n : $u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

3) Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

- **a.** Exprimer S_n en fonction de n.
- **b.** Déterminer la limite de (S_n).

Exercice facultatif

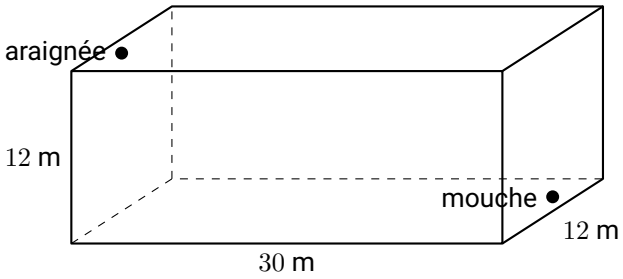
hors barème

LA GAZETTE D'AIRCAR

Scène de boucherie dans un hangar

Le commissaire Saplanne est confronté à une affaire peu commune. La scène se passe dans un hangar de la société Aircar. Selon les témoins, la victime, une mouche sans défense, se reposait sur un des murs du local, au milieu de ce mur carré de douze mètres de côté, à un mètre au-dessus du sol. Le principal suspect, une araignée pourtant d'apparence inoffensive, se trouvait sur le mur opposé, le même carré (12 m $\times$ 12 m), au milieu, à un mètre sous le plafond. Le commissaire a demandé les

plans du hangar, qui est un parallélépipède rectangle (dans le jargon mathématique) de trente mètres de long et de douze mètres sur douze (pour les murs carrés).



« Je ne comprends pas ce qui s'est passé, raconte une chenille qui passait par là. Je connais bien cette mouche, nous avons fait nos études ensemble, c'était d'ailleurs la meilleure en mathématiques. Elle avait vu l'araignée en face et, selon ses calculs, celle-ci avait besoin d'au moins 42 secondes pour l'atteindre. Voici le raisonnement qu'elle m'a tenu : *si l'araignée descend à la verticale jusqu'au sol, elle parcourra 11 mètres. Après quoi elle franchira 30 mètres sur le plancher, pour arriver juste 1 mètre en dessous de moi. Au plus court, elle doit donc parcourir $11 + 30 + 1 = 42$ mètres. Je vais donc dormir 41 secondes, ce qui me laissera assez de temps pour m'échapper.* »

En effet, selon le professeur Sticmou, spécialiste des araignées, cette espèce d'araignée ne peut se déplacer que sur les parois du hangar (murs, plafond ou sol). De plus, elle se déplace à une vitesse de 1 mètre par seconde.

Le commissaire Saplanne est persuadé de la culpabilité de l'araignée, mais il ne comprend pas comment la mouche a pu se faire dévorer. L'araignée serait-elle arrivée avant les 41 secondes ?