Exercice 1

6 points

1) $\ln(X)$ n'existe que pour $X > 0$. L'équation (E) a un sens si et seulement si les deux logarithmes existent :

$$\begin{cases} 4x - 1 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ x > -3 \end{cases} \iff x > \frac{1}{4}.$$

L'ensemble de définition de (E) est $\boxed{\mathcal{D} = \left]\frac{1}{4}\,;+\infty\right[}$.

2) Pour $x \in \mathcal{D}$, la fonction $\ln$ étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$:

$$\ln(4x-1) = \ln(x+3) \iff 4x - 1 = x + 3 \iff 3x = 4 \iff x = \frac{4}{3}.$$

$\frac{4}{3} > \frac{1}{4}$, donc $\frac{4}{3} \in \mathcal{D}$ (vérification : $4 \times \frac{4}{3} - 1 = \frac{13}{3}$ et $\frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{3}$).

$$\boxed{S = \left\{\frac{4}{3}\right\}}$$

Exercice 2

6 points

On transforme chaque terme avec $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$ et $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$:

- $\ln(20) = \ln\left(2^2 \times 5\right) = 2\ln(2) + \ln(5)$;
- $\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$, donc $6\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 3$;
- $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, donc $4\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -4\ln(2)$.

Ainsi

$$A = 2\ln(2) + \ln(5) - 3 - 4\ln(2), \qquad \text{soit} \qquad \boxed{A = \ln(5) - 2\ln(2) - 3}.$$

Exercice 3

8 points

Dérivée. f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ (somme de fonctions dérivables) et, comme $\ln'(x) = \frac{1}{x}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{x-4}{x}}.$$

Signe de f'. Sur $]0\,;+\infty[$, $x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 4$: $f'(x) < 0$ sur $]0\,;4[$, $f'(4) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]4\,;+\infty[$.

Valeur en 4. $f(4) = 4 - 4\ln(4) = 4 - 4\ln\left(2^2\right)$, soit $\boxed{f(4) = 4 - 8\ln(2)}$ $(\approx -1{,}55)$.

Limite en 0. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \big(-4\ln(x)\big) = +\infty$.
Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$.

Limite en $+\infty$. C'est une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Pour $x > 0$, on factorise par x :

$$f(x) = x\left(1 - 4\,\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - 4\,\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 1$; et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.
Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

Tableau de variations complet.

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$4 - 8\ln(2)$	↗	$+\infty$

f est $\boxed{\text{strictement décroissante sur }]0\,;4]}$ et $\boxed{\text{strictement croissante sur } [4\,;+\infty[}$; elle admet un minimum $4 - 8\ln(2)$ atteint en $x = 4$.