Exercice 1

7 points

1) **a.** u est une fonction polynôme : $\boxed{\mathcal{D}_u = \mathbb{R}}$.
$v(x) = \sqrt{x}$ existe si et seulement si $x \geqslant 0$: $\boxed{\mathcal{D}_v = [0\,;+\infty[}$.

b. $v \circ u(x) = v\big(u(x)\big)$ existe si et seulement si $u(x) \geqslant 0$.
u est un trinôme de discriminant $\Delta = 8^2 - 4 \times (-2) \times 24 = 64 + 192 = 256 = 16^2 > 0$, de racines

$$x_1 = \frac{-8-16}{-4} = 6 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-8+16}{-4} = -2,$$

donc $u(x) = -2(x+2)(x-6)$. Le coefficient de x^2 est $-2 < 0$: $u(x)$ est positif entre les racines.

x	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\boxed{\mathcal{D}_{v\circ u} = [-2\,;6]}$ et, pour tout $x \in [-2\,;6]$,

$$\boxed{f(x) = \sqrt{-2x^2+8x+24}}.$$

c. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ (pas en 0).
f est donc dérivable en tout x tel que $u(x) > 0$, c'est-à-dire sur $\boxed{\,]-2\,;6[\,}$.
Avec $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $u'(x) = -4x+8$, pour tout $x \in\,]-2\,;6[$:

$$f'(x) = \frac{-4x+8}{2\sqrt{-2x^2+8x+24}}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{-2x+4}{\sqrt{-2x^2+8x+24}}}.$$

d. Sur $]-2\,;6[$, le dénominateur est strictement positif, donc $f'(x)$ a le signe de $-2x+4$: positif pour $x < 2$, nul en 2, négatif pour $x > 2$.
Valeurs : $f(-2) = f(6) = \sqrt{0} = 0$ et $f(2) = \sqrt{-8+16+24} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

x	-2		2		6
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
f	0	↗	$4\sqrt{2}$	↘	0

f est croissante sur $[-2\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;6]$.
Elle admet un $\boxed{\text{maximum } 4\sqrt{2} \approx 5{,}66 \text{ atteint en } x = 2}$
et un $\boxed{\text{minimum } 0 \text{ atteint en } -2 \text{ et en } 6}$.

2) **a.** $f = 3\mathrm{e}^w$ avec $w(x) = x^3 - 12x$ et $w'(x) = 3x^2 - 12$. Avec $(\mathrm{e}^w)' = w'\mathrm{e}^w$:

$$f'(x) = 3\left(3x^2-12\right)\mathrm{e}^{x^3-12x}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = 9(x-2)(x+2)\,\mathrm{e}^{x^3-12x}}.$$

b. Pour tout réel x, $9\,\mathrm{e}^{x^3-12x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$: trinôme

positif à l'extérieur des racines -2 et 2.
$f(-2) = 3\mathrm{e}^{-8+24} = 3\mathrm{e}^{16}$ et $f(2) = 3\mathrm{e}^{8-24} = 3\mathrm{e}^{-16}$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	$3\mathrm{e}^{16}$	↘	$3\mathrm{e}^{-16}$	↗	

f est croissante sur $]-\infty\,;-2]$, décroissante sur $[-2\,;2]$, croissante sur $[2\,;+\infty[$.

Exercice 2

3 points

Lecture de la courbe de f' : f' s'annule en -1, 1 et 3; $f'(x) < 0$ sur $[-2\,;-1[$ et sur $]1\,;3[$, $f'(x) > 0$ sur $]-1\,;1[$ et sur $]3\,;4]$.
f' est croissante sur $[-2\,;0]$, décroissante sur $[0\,;2]$, croissante sur $[2\,;4]$.
Rappels : f est croissante là où $f' \geqslant 0$; f est convexe là où f' est croissante, concave là où f' est décroissante; un point d'inflexion correspond à un changement de convexité.

1) Sur $]0\,;1[$, $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $[0\,;1]$, donc pas décroissante sur $[0\,;2]$. Faux

2) Sur $[-1\,;1]$, la courbe de f' est au-dessus de l'axe des abscisses : $f'(x) \geqslant 0$ (nul seulement en -1 et 1), donc f est croissante sur $[-1\,;1]$. Vrai

3) f' s'annule en -1 en changeant de signe (négative avant, positive après) : f est décroissante sur $[-2\,;-1]$ puis croissante sur $[-1\,;1]$, donc f admet un minimum local en -1. Vrai

4) f' est croissante sur $[2\,;4]$, donc f est convexe sur $[2\,;4]$. Vrai

5) f' est décroissante sur $[1\,;2]$ mais croissante sur $[2\,;3]$: f est concave sur $[1\,;2]$ et convexe sur $[2\,;3]$, donc pas concave sur $[1\,;3]$. Faux

6) f' change de sens de variation en 0 (maximum local) et en 2 (minimum local) : f'' change de signe en 0 et en 2, la convexité de f change deux fois. Le graphe de f admet **deux** points d'inflexion, d'abscisses 0 et 2. Faux

Exercice 3

5 points

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions dérivables), et $\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)' = \mathrm{e}^{x-1}$:

$$\boxed{f'(x) = 2\mathrm{e}^{x-1} - 2x - 1} \quad \text{et} \quad \boxed{f''(x) = 2\mathrm{e}^{x-1} - 2}.$$

2) f est convexe là où $f'' \geqslant 0$.

$$f''(x) \geqslant 0 \iff 2\mathrm{e}^{x-1} \geqslant 2 \iff \mathrm{e}^{x-1} \geqslant \mathrm{e}^{0} \iff x - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1,$$

car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De même $f''(x) < 0 \iff x < 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

f est $\boxed{\text{concave sur }]-\infty\,;1] \text{ et convexe sur } [1\,;+\infty[}$.

3) f'' s'annule en 1 en changeant de signe : la convexité de f change en 1, donc $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse 1.
$f(1) = 2\mathrm{e}^{0} - 1^2 - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$, donc $\boxed{A(1\,;0)}$.

4) $f'(1) = 2\mathrm{e}^{0} - 2 - 1 = -1$. La tangente en A a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, soit $y = -(x-1) + 0$:

$$\boxed{T : y = -x + 1}.$$

5) f est convexe sur $[1\,;+\infty[$, donc sur cet intervalle $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes, en particulier de la tangente T au point A d'abscisse 1. Pour tout $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} f(x) \geqslant -x + 1 &\iff 2\mathrm{e}^{x-1} - x^2 - x \geqslant -x + 1 \\ &\iff 2\mathrm{e}^{x-1} \geqslant x^2 + 1 \qquad \text{(on ajoute } x^2 + x\text{)} \\ &\iff \mathrm{e}^{x-1} \geqslant \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right) \qquad \text{(on divise par } 2 > 0\text{)}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 1,\ \mathrm{e}^{x-1} \geqslant \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)}$.

Exercice 4

3,5 points

1) $\sqrt{3x}$ existe si et seulement si $3x \geqslant 0$, soit $x \geqslant 0$; le dénominateur $x+1$ ne s'annule qu'en -1, qui n'est pas dans $[0\,;+\infty[$.

$$\boxed{\mathcal{D}_f = [0\,;+\infty[}.$$

$x \mapsto \sqrt{3x}$ est dérivable lorsque $3x > 0$ (la racine carrée n'est pas dérivable en 0) et $x \mapsto x+1$ est dérivable et non nulle sur $[0\,;+\infty[$. Par quotient, f est dérivable sur $\boxed{]0\,;+\infty[}$.

2) On pose $p(x) = \sqrt{3x}$ et $q(x) = x+1$. Alors $p'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x}}$ (dérivée de $\sqrt{w}$ avec $w = 3x$) et $q'(x) = 1$.

Avec $\left(\dfrac{p}{q}\right)' = \dfrac{p'q - pq'}{q^2}$, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}(x+1) - \sqrt{3x}}{(x+1)^2} = \frac{\dfrac{3(x+1)}{2\sqrt{3x}} - \dfrac{2\sqrt{3x}\times\sqrt{3x}}{2\sqrt{3x}}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3(x+1) - 2\times 3x}{2\sqrt{3x}\,(x+1)^2} = \frac{3x+3-6x}{2\sqrt{3x}\,(x+1)^2},$$

soit $\boxed{f'(x) = \dfrac{-3x+3}{2\sqrt{3x}\,(x+1)^2}}$.

3) Pour $x > 0$, $2\sqrt{3x}\,(x+1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $-3x+3$: positif pour $x < 1$, nul en 1, négatif pour $x > 1$.

$f(0) = \dfrac{0}{1} = 0$ et $f(1) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(Limite en $+\infty$, pour information : pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{x}}{x+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}$, qui tend vers 0.)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↘	0

f admet un $\boxed{\text{maximum } \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87 \text{ atteint en } x = 1}$ et un $\boxed{\text{minimum } 0 \text{ atteint en } x = 0}$.

Exercice 5

1,5 point

f et g sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $g \circ f$ aussi. Pour tout réel x, avec $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$:

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)\, g'\big(f(x)\big).$$

On dérive ce produit ; la dérivée de $x \mapsto g'\big(f(x)\big)$ est $x \mapsto f'(x)\, g''\big(f(x)\big)$:

$$(g \circ f)''(x) = f''(x)\, g'\big(f(x)\big) + \big(f'(x)\big)^2\, g''\big(f(x)\big).$$

Or, pour tout réel x :

- $f''(x) \geqslant 0$ car f est convexe, et $g'\big(f(x)\big) \geqslant 0$ car g est croissante : $f''(x)\, g'\big(f(x)\big) \geqslant 0$;
- $\big(f'(x)\big)^2 \geqslant 0$ (un carré), et $g''\big(f(x)\big) \geqslant 0$ car g est convexe : $\big(f'(x)\big)^2 g''\big(f(x)\big) \geqslant 0$.

Somme de deux nombres positifs, $(g \circ f)''(x) \geqslant 0$ pour tout réel x : $\boxed{g \circ f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}}$.