Exercice 1

6 points

1) $f = u \times w$ avec $u(x) = 1 - x^2$ et $w(x) = \mathrm{e}^{-5x^2+2}$.

- $u'(x) = -2x$;
- $\left(\mathrm{e}^k\right)' = k'\,\mathrm{e}^k$ avec $k(x) = -5x^2 + 2$, $k'(x) = -10x$: $w'(x) = -10x\,\mathrm{e}^{-5x^2+2}$.

Avec $(uw)' = u'w + uw'$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x\,\mathrm{e}^{-5x^2+2} + \left(1 - x^2\right)(-10x)\,\mathrm{e}^{-5x^2+2} \\ &= \left(-2x - 10x + 10x^3\right)\mathrm{e}^{-5x^2+2}, \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{f'(x) = \left(10x^3 - 12x\right)\mathrm{e}^{-5x^2+2} = 2x\left(5x^2 - 6\right)\mathrm{e}^{-5x^2+2}}.$$

2) $g = \sqrt{w}$ avec $w(x) = \dfrac{2+x}{1-x}$. On utilise $(\sqrt{w})' = \dfrac{w'}{2\sqrt{w}}$.

Avec $\left(\dfrac{p}{q}\right)' = \dfrac{p'q - pq'}{q^2}$, $p(x) = 2 + x$, $q(x) = 1 - x$, $p'(x) = 1$, $q'(x) = -1$:

$$w'(x) = \frac{1 \times (1-x) - (2+x) \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1 - x + 2 + x}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}.$$

Donc

$$\boxed{g'(x) = \frac{3}{2\,(1-x)^2\sqrt{\dfrac{2+x}{1-x}}}}.$$

3) $h(x) = \left(2x^2 - x + 1\right)^{-5}$ est de la forme v^{-5} avec $v(x) = 2x^2 - x + 1$ et $v'(x) = 4x - 1$.
Comme $(v^n)' = n\,v'\,v^{n-1}$ pour tout entier relatif n :

$$h'(x) = -5\,(4x-1)\left(2x^2 - x + 1\right)^{-6}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{h'(x) = \frac{-5\,(4x-1)}{\left(2x^2 - x + 1\right)^6}}.$$

Exercice 2

4 points

1) On pose $\boxed{v(x) = 25 - 4x^2 \quad \text{et} \quad u(X) = \sqrt{X}}$. Alors $u \circ v(x) = u\big(v(x)\big) = \sqrt{25 - 4x^2} = f(x)$.

2) $u \circ v(x)$ existe si et seulement si $v(x) \geqslant 0$ (u est définie sur $[0\,;+\infty[$ et v sur $\mathbb{R}$).
$25 - 4x^2 = (5-2x)(5+2x)$ est un polynôme du second degré de racines $-\dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{5}{2}$, de coefficient dominant $-4 < 0$: il est positif entre ses racines.

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \left[-\tfrac{5}{2}\,;\tfrac{5}{2}\right]}.$$

v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et u est dérivable sur $]0\,;+\infty[$; $u \circ v$ est donc dérivable là où $v(x) > 0$:

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \left]-\tfrac{5}{2}\,;\tfrac{5}{2}\right[}.$$

3) Pour tout $x \in \left]-\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right[$, avec $(\sqrt{v})' = \dfrac{v'}{2\sqrt{v}}$ et $v'(x) = -8x$:

$$f'(x) = \frac{-8x}{2\sqrt{25-4x^2}} = \boxed{\frac{-4x}{\sqrt{25-4x^2}}}.$$

Le dénominateur est strictement positif, donc $f'(x)$ a le signe de $-4x$: $f'(x) > 0$ sur $\left]-\frac{5}{2}\,;0\right[$, $f'(0) = 0$ et $f'(x) < 0$ sur $\left]0\,;\frac{5}{2}\right[$.
Valeurs : $f\left(-\frac{5}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{25-25} = 0$ et $f(0) = \sqrt{25} = 5$.

x	$-\frac{5}{2}$		0		$\frac{5}{2}$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
f	0	↗	5	↘	0

f est croissante sur $\left[-\frac{5}{2}\,;0\right]$ et décroissante sur $\left[0\,;\frac{5}{2}\right]$.

Exercice 3

4 points

On lit sur le graphique le signe de f'' : la courbe de f'' coupe l'axe des abscisses en $A(-1\,;0)$ et $C(4\,;0)$; elle est au-dessus de l'axe sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]4\,;+\infty[$, au-dessous sur $]-1\,;4[$ (elle passe par $B(0\,;-4)$).

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
convexité de f		convexe		concave		convexe	

1) f'' s'annule **en changeant de signe** en -1 et en 4 : la convexité de f change en ces deux points.

La courbe de f possède deux points d'inflexion, d'abscisses -1 et 4.

2) Sur $[-1\,;4]$, la courbe de f'' est au-dessous de l'axe des abscisses : $f''(x) \leqslant 0$ (par exemple $f''(0) = -4 < 0$).

Sur $[-1\,;4]$, f est concave.

3) D'après les questions précédentes, la courbe de f doit être convexe avant $x = -1$, concave sur $[-1\,;4]$, puis de nouveau convexe après $x = 4$.

- **Courbe 2** : elle admet un minimum en -1, puis remonte en s'incurvant vers le haut : elle est

convexe sur $[-1\,;0]$ environ et ne change de convexité que vers $x=0$ (et non en -1). Ce n'est pas compatible avec la concavité de f sur $[-1\,;4]$.

- **Courbe 1** : elle est convexe jusqu'à $x=-1$ environ (elle y passe par un minimum en -2), concave entre -1 et 4 (avec un maximum en 1, la courbe restant au-dessous de ses tangentes), puis convexe au-delà. C'est compatible avec le signe de f''.

La courbe représentative de f est la courbe 1.

Exercice 4

6 points

1) **a.** $f=u\times w$ avec $u(x)=x$, $u'(x)=1$, et $w(x)=\mathrm{e}^{x^2-1}$, $w'(x)=2x\,\mathrm{e}^{x^2-1}$ (car $\left(\mathrm{e}^k\right)'=k'\,\mathrm{e}^k$).

$$f'(x)=1\times\mathrm{e}^{x^2-1}+x\times 2x\,\mathrm{e}^{x^2-1},\qquad \text{soit}\qquad \boxed{f'(x)=\left(2x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2-1}}.$$

b. Pour tout réel x, $2x^2+1\geqslant 1>0$ et $\mathrm{e}^{x^2-1}>0$, donc $f'(x)>0$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) **a.** On dérive $f'(x)=\left(2x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$ comme un produit, avec $\left(2x^2+1\right)'=4x$:

$$\begin{aligned}f''(x)&=4x\,\mathrm{e}^{x^2-1}+\left(2x^2+1\right)\times 2x\,\mathrm{e}^{x^2-1}\\&=2x\left(2+2x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2-1},\end{aligned}$$

donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\boxed{f''(x)=2x\left(2x^2+3\right)\mathrm{e}^{x^2-1}}$.

b. Pour tout réel x, $2x^2+3>0$ et $\mathrm{e}^{x^2-1}>0$: $f''(x)$ a le signe de $2x$.
Donc $f''(x)\geqslant 0 \iff x\geqslant 0$: f est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$.

Le plus grand intervalle sur lequel f est convexe est $[0\,;+\infty[$.

c. $f(1)=1\times\mathrm{e}^0=1$ et $f'(1)=(2+1)\,\mathrm{e}^0=3$.
La tangente au point A d'abscisse 1 a pour équation $y=f'(1)(x-1)+f(1)=3(x-1)+1$:

$$\boxed{y=3x-2}.$$

d. f est convexe sur $[0\,;+\infty[$, donc sur cet intervalle sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes, en particulier de la tangente en A (car $1\in[0\,;+\infty[$) :

pour tout $x\in[0\,;+\infty[$, $\quad x\,\mathrm{e}^{x^2-1}\geqslant 3x-2$.