Calculatrice autorisée (mode examen)
Toutes les réponses doivent être justifiées et clairement rédigées.

Exercice 1

6 points

Calculer la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous (on ne se préoccupera pas des ensembles de définition) :

1) $f(x) = \left(1 - x^2\right) \mathrm{e}^{-5x^2+2}$

2) $g(x) = \sqrt{\dfrac{2+x}{1-x}}$

3) $h(x) = \dfrac{1}{(2x^2 - x + 1)^5}$

Exercice 2

4 points

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{25 - 4x^2}$.

1) Sans se soucier des ensembles de définition, déterminer des fonctions u et v telles que $f(x) = u \circ v(x)$.

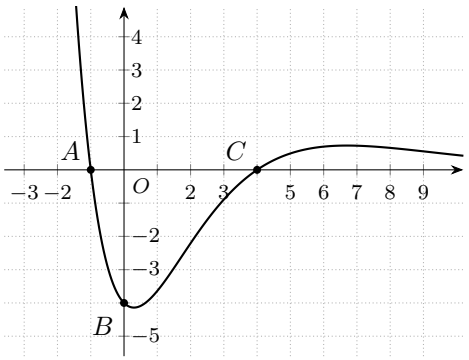
2) Déterminer l'ensemble de définition, puis l'ensemble de dérivabilité de $u \circ v$.

3) Étudier le sens de variation de f.

Exercice 3

4 points

Une fonction f, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, a pour **dérivée seconde** la fonction f'', dont la représentation graphique, tracée dans un repère orthonormé, est donnée ci-dessous.
Cette courbe passe par les points $A(-1\,;0)$, $B(0\,;-4)$ et $C(4\,;0)$.



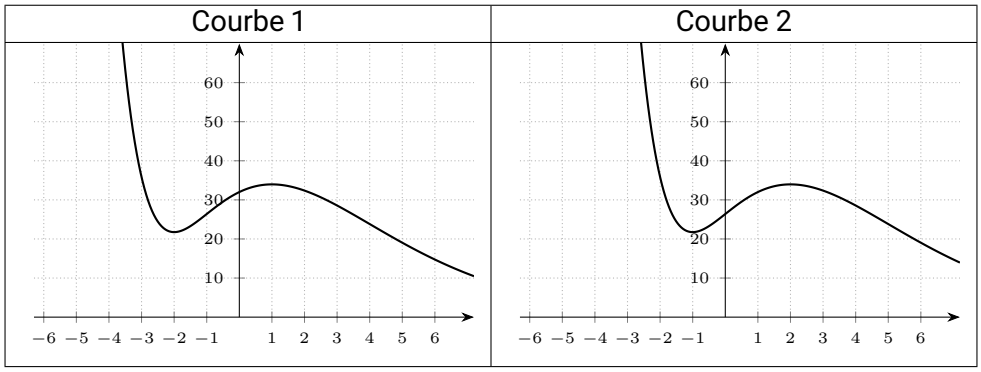
Représentation graphique de f''

Chaque réponse sera justifiée en s'appuyant sur le graphique.

1) Combien de points d'inflexion la courbe de f possède-t-elle ? Préciser leurs abscisses.

2) Quelle est la convexité de f sur l'intervalle $[-1\,;4]$?

3) L'une seulement des deux courbes ci-dessous représente la fonction f. Identifier cette courbe en expliquant le choix.



Exercice 4

6 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2-1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) **a.** Déterminer $f'(x)$.

b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2) **a.** Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 2x\left(2x^2+3\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$.

b. Déterminer le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction f est convexe.

c. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

d. Par convexité de f, en déduire une inégalité valable sur l'intervalle de la question **2)b.**