Exercice 1

6 points

Partie A

1) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, donc $\mathrm{e}^x + 1 > 1 > 0$: le quotient $f(x)$ est strictement positif.
De plus $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^x + 1$; en divisant par $\mathrm{e}^x + 1 > 0$, on obtient $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} < 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ 0 < f(x) < 1.}$$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
Avec $u(x) = \mathrm{e}^x$, $v(x) = \mathrm{e}^x + 1$, $u'(x) = v'(x) = \mathrm{e}^x$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2} = \boxed{\frac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2}}.$$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ et $\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

Partie B

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $P(n)$: « $0 < u_n < 1$ ».

Initialisation ($n = 1$). $u_1 = f(u_0) = f(3) = \dfrac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^3 + 1}$. D'après la partie A, question 1, $0 < f(3) < 1$, donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \geqslant 1$ tel que $P(n)$ soit vraie : $0 < u_n < 1$.
u_n est un nombre réel, donc d'après la partie A, question 1, $0 < f(u_n) < 1$, c'est-à-dire $0 < u_{n+1} < 1$: $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. $P(1)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 1,\ 0 < u_n < 1.}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Q(n)$: « $u_{n+1} \leqslant u_n$ ».

Initialisation ($n = 0$). $u_1 = \dfrac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^3 + 1} < 1$ (question précédente) et $u_0 = 3$, donc $u_1 \leqslant u_0$: $Q(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ soit vraie. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ (partie A) :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} \leqslant u_n \\ \Longrightarrow\ & f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \quad (f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \\ \Longleftrightarrow\ & u_{n+2} \leqslant u_{n+1}. \end{aligned}$$

$Q(n+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.

Conclusion. $Q(0)$ est vraie et Q est héréditaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$:

la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 2

7 points

1) $u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 + 3 = 3 \times 0 + 3$, donc $u_1 = 3$.
$u_2 = 3u_1 - 2 \times 1 + 3 = 9 - 2 + 3$, donc $u_2 = 10$.

2) **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $u_n \geqslant n$ ».
Initialisation. $u_0 = 0 \geqslant 0$: $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.

$$\begin{aligned}
& u_n \geqslant n \\
\iff\ & 3u_n \geqslant 3n && \text{(on multiplie par } 3 > 0\text{)} \\
\iff\ & 3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3 && \text{(on ajoute } -2n+3\text{)} \\
\iff\ & u_{n+1} \geqslant n + 3 \\
\implies\ & u_{n+1} \geqslant n + 1 && \text{(car } n+3 \geqslant n+1\text{).}
\end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion. Par récurrence, $u_n \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(u_n - n) + 3.$$

D'après la question précédente, $u_n - n \geqslant 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 3 > 0$.

La suite (u_n) est strictement croissante.

3) **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n \\
&= 3u_n - 3n + 3 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n.
\end{aligned}$$

De plus $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$.

(v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 1$.

b. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 3^n = 3^n$.
Or $v_n = u_n - n + 1$, donc $u_n = v_n + n - 1$, d'où :

$u_n = 3^n + n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(On peut aussi le démontrer par récurrence : $u_0 = 3^0 + 0 - 1 = 0$, et si $u_n = 3^n + n - 1$, alors $u_{n+1} = 3^{n+1} + 3n - 3 - 2n + 3 = 3^{n+1} + (n+1) - 1$.)

c. On sépare la somme en trois sommes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(3^k + k - 1\right) = \sum_{k=0}^{n} 3^k + \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1.$$

- somme des termes d'une suite géométrique de raison $3 \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \frac{3^{n+1} - 1}{2} ;$$

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$ (il y a $n + 1$ termes).

Donc

$$S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) = \frac{3^{n+1} - 1 + n^2 + n - 2n - 2}{2},$$

soit

$$\boxed{S_n = \frac{3^{n+1} + n^2 - n - 3}{2}}.$$

Contrôle : $S_2 = \dfrac{27 + 4 - 2 - 3}{2} = 13 = 0 + 3 + 10.$

Exercice 3

7 points

1) $a_1 = \dfrac{1}{2} \times 0 + 5$, donc $\boxed{a_1 = 5}$; $\quad b_1 = 3 \times 0 + 2 \times 1 + 1$, donc $\boxed{b_1 = 3}$.

2) **a.** Pour $n = 1$, la boucle est parcourue une fois :

- a prend la valeur $\dfrac{0}{2} + 5 = 5$;
- b prend la valeur $3 \times 5 + 2 \times 1 + 1 = 18$, car a vaut *déjà* 5.

L'algorithme affiche $\boxed{a = 5 \text{ et } b = 18}$.
$a = 5 = a_1$ est correct, mais $b = 18 \neq b_1 = 3$: **les résultats ne sont pas cohérents**. Le calcul de b utilise la nouvelle valeur de a (c'est-à-dire a_{n+1}) au lieu de l'ancienne (a_n).

b. Il faut calculer b_{n+1} avec a_n, donc avant de modifier a. Deux corrections possibles :

- **échanger les deux lignes** de la boucle : d'abord $b \leftarrow 3a + 2b + 1$, puis $a \leftarrow \dfrac{a}{2} + 5$;
- ou **sauvegarder** l'ancienne valeur : $c \leftarrow a$, puis $a \leftarrow \dfrac{a}{2} + 5$, puis $b \leftarrow 3c + 2b + 1$.

(Échanger les lignes suffit ici car le calcul de a_{n+1} n'utilise pas b.)

3) **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = a_{n+1} - 10 = \frac{1}{2}a_n + 5 - 10 = \frac{1}{2}a_n - 5 = \frac{1}{2}(a_n - 10) = \frac{1}{2}u_n.$$

De plus $u_0 = a_0 - 10 = -10$.

$\boxed{(u_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2} \text{ et de premier terme } u_0 = -10.}$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, et $a_n = u_n + 10$:

$$\boxed{a_n = 10 - 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $b_n = -31 + 12 \times 2^n + 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation. $-31 + 12 \times 2^0 + 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = -31 + 12 + 20 = 1 = b_0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Avec la question 3)b. :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 3a_n + 2b_n + 1 \\ &= 3\left(10 - 10 \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) + 2\left(-31 + 12 \times 2^n + 20 \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) + 1 \\ &= 30 - 30 \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^n - 62 + 24 \times 2^n + 40 \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 1 \\ &= -31 + 12 \times 2 \times 2^n + 20 \times \tfrac{1}{2} \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &= -31 + 12 \times 2^{n+1} + 20 \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$\boxed{b_n = -31 + 12 \times 2^n + 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

Contrôle : $b_1 = -31 + 24 + 10 = 3$ et $b_2 = -31 + 48 + 5 = 22 = 3 \times 5 + 2 \times 3 + 1$.