Calculatrice interdite

Exercice 1

6 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

1) Démontrer que, pour tout réel x, $0 < f(x) < 1$.

2) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{u_n} + 1} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 < u_n < 1$.

2) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 2

7 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 3. On précisera son premier terme.

b. Par la méthode de votre choix, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer en fonction de n la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Exercice 3

7 points

On considère deux suites de nombres réels (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 5 \\ b_{n+1} = 3a_n + 2b_n + 1 \end{cases}$$

1) Calculer a_1 et b_1.

2) On souhaite écrire un algorithme qui affiche en sortie les valeurs de a_n et b_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.
L'algorithme suivant est proposé :

$a \leftarrow 0$
$b \leftarrow 1$
Pour k variant de 1 à n :
    $a \leftarrow \dfrac{a}{2} + 5$
    $b \leftarrow 3a + 2b + 1$
Fin pour
Afficher a
Afficher b

a. Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1)** ?

b. Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 10$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

b. En déduire une expression de a_n en fonction de n.

4) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$b_n = -31 + 12 \times 2^n + 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$