Exercice 1

6,5 points

Partie A

1) En 2019 ($n = 0$), le prix est de 300 euros ; en 2020, il augmente de 10 euros :

$$\boxed{u_0 = 300} \quad \text{et} \quad \boxed{u_1 = 300 + 10 = 310}.$$

2) Chaque année, on ajoute 10 euros au prix de l'année précédente : pour tout entier naturel n,

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + 10}.$$

La suite (u_n) est donc $\boxed{\text{arithmétique de raison } r = 10 \text{ et de premier terme } u_0 = 300}$.

3) Pour une suite arithmétique, $u_n = u_0 + n\,r$, donc pour tout entier naturel n :

$$\boxed{u_n = 300 + 10n}.$$

4) L'année 2030 correspond à $n = 2030 - 2019 = 11$:

$$u_{11} = 300 + 10 \times 11 = 410.$$

En 2030, la mutuelle de l'assureur A coûtera $\boxed{410 \text{ euros}}$.

5) En 25 ans (de 2019 à 2043), Claire paie $u_0 + u_1 + \cdots + u_{24}$, somme de 25 termes consécutifs d'une suite arithmétique, avec $u_{24} = 300 + 10 \times 24 = 540$:

$$S_A = 25 \times \frac{u_0 + u_{24}}{2} = 25 \times \frac{300 + 540}{2} = 25 \times 420 = 10\,500.$$

Avec l'assureur A, Claire aura payé $\boxed{10\,500 \text{ euros}}$.

Partie B

1) Augmenter de $2\,\%$, c'est multiplier par $1 + \dfrac{2}{100} = 1{,}02$:

$$\boxed{v_0 = 300} \quad \text{et} \quad \boxed{v_1 = 300 \times 1{,}02 = 306}.$$

2) Pour tout entier naturel n, $\boxed{v_{n+1} = 1{,}02\,v_n}$.

La suite (v_n) est donc $\boxed{\text{géométrique de raison } q = 1{,}02 \text{ et de premier terme } v_0 = 300}$.

3) Pour une suite géométrique, $v_n = v_0 \times q^n$, donc pour tout entier naturel n :

$$\boxed{v_n = 300 \times 1{,}02^{\,n}}.$$

4) En 2030, $n = 11$:

$$v_{11} = 300 \times 1{,}02^{11} \approx 373{,}012\,3.$$

En 2030, la mutuelle de l'assureur B coûtera environ $\boxed{373{,}01 \text{ euros}}$.

5) En 25 ans, Claire paie $v_0 + v_1 + \cdots + v_{24}$, somme de 25 termes consécutifs d'une suite géométrique

de raison $q = 1{,}02 \neq 1$:

$$S_B = v_0 \times \frac{1-q^{25}}{1-q} = 300 \times \frac{1-1{,}02^{25}}{1-1{,}02} = 300 \times \frac{1{,}02^{25}-1}{0{,}02} \approx 9\,609{,}089\,9.$$

Avec l'assureur B, Claire aura payé environ $\boxed{9\,609{,}09 \text{ euros}}$.

Partie C

On répète les calculs tant que le prix B n'a pas dépassé le prix A, c'est-à-dire tant que $v \leqslant u$ (au départ $u = v = 300$, la condition doit donc être vraie : « `v < u` » arrêterait la boucle dès le début). À chaque passage, on calcule les prix de l'année suivante et on augmente n de 1.

```
def annee():
    u = 300
    v = 300
    n = 0
    while v <= u:
        u = u + 10
        v = v * 1.02
        n = n + 1
    return 2019 + n
```

Pour information (non demandé) : la boucle s'arrête pour $n = 49$, avec $u_{49} = 790$ et $v_{49} \approx 791{,}64$ (alors que $u_{48} = 780$ et $v_{48} \approx 776{,}12$) ; la fonction renvoie 2068.

Exercice 2

4 points

1) **a.** Le youtubeur conserve $60\,\%$ de ses 75 abonnés et en gagne 100 :

$$U_1 = 0{,}6 \times 75 + 100 = 45 + 100 = \boxed{145}.$$

Il y a bien 145 abonnés au 1er février 2019.

b. Le même raisonnement, appliqué chaque mois, donne pour tout entier naturel n :

$$\boxed{U_{n+1} = 0{,}6\,U_n + 100}.$$

c. Avec le tableur de la calculatrice :

n	0	1	2	3	4	5	6	20
U_n	75	145	187	212,2	227,32	$\approx 236{,}39$	$\approx 241{,}84$	$\approx 249{,}99$

Le nombre d'abonnés $\boxed{\text{augmente}}$ et semble $\boxed{\text{tendre vers } 250}$ lorsque n devient très grand.

2) **a.** Pour tout entier naturel n :

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 250 = 0{,}6\,U_n + 100 - 250 = 0{,}6\,U_n - 150 = 0{,}6\,(U_n - 250) = 0{,}6\,V_n.$$

Donc $\boxed{(V_n) \text{ est géométrique de raison } 0{,}6}$, de premier terme $V_0 = U_0 - 250 = 75 - 250 = -175$.

b. Pour tout entier naturel n :

$$\boxed{V_n = -175 \times 0{,}6^n}, \quad \text{puis} \quad U_n = V_n + 250, \text{ soit } \boxed{U_n = 250 - 175 \times 0{,}6^n}.$$

c. Pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} - U_n = -175 \times 0{,}6^{n+1} + 175 \times 0{,}6^n = 175 \times 0{,}6^n (1 - 0{,}6) = 70 \times 0{,}6^n.$$

Comme $0{,}6^n > 0$, on a $U_{n+1} - U_n > 0$: la suite (U_n) est $\boxed{\text{strictement croissante}}$.

Exercice 3

5 points

1) A et B sont sur l'axe des abscisses, donc leur ordonnée est nulle :

$$-\frac{1}{2}x^2 + 8 = 0 \iff x^2 = 16 \iff x = -4 \text{ ou } x = 4.$$

D'après la figure, A est à gauche : $\boxed{x_A = -4}$ et $\boxed{x_B = 4}$.

2) M a pour coordonnées $\left(x\,;\, -\frac{1}{2}x^2 + 8\right)$ avec $x \in [-4\,;\,4]$, et $N(x\,;\,0)$.

- A et N sont sur l'axe des abscisses et $x \geqslant -4$: $\boxed{AN = x - (-4) = x + 4}$.
- M est au-dessus de l'axe des abscisses (entre A et B, $-\frac{1}{2}x^2+8 \geqslant 0$) : $\boxed{MN = -\frac{1}{2}x^2 + 8}$.

3) Le triangle AMN est rectangle en N, donc son aire vaut

$$\frac{AN \times MN}{2} = \frac{(x+4)\left(-\frac{1}{2}x^2 + 8\right)}{2} = \frac{-\frac{1}{2}x^3 + 8x - 2x^2 + 32}{2} = -\frac{1}{4}x^3 - x^2 + 4x + 16.$$

L'aire du triangle AMN est bien $\boxed{f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - x^2 + 4x + 16}$ pour $x \in [-4\,;\,4]$.

4) **a.** f est une fonction polynôme, dérivable sur $[-4\,;\,4]$:

$$\boxed{f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 2x + 4}.$$

b. $f'(x)$ est un polynôme du second degré : $a = -\frac{3}{4}$, $b = -2$, $c = 4$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times 4 = 4 + 12 = 16 > 0.$$

Deux racines : $x_1 = \dfrac{2-4}{2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)} = \dfrac{-2}{-\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3}$ et $x_2 = \dfrac{2+4}{-\frac{3}{2}} = -4$.

Comme $a < 0$, $f'(x)$ est positif entre les racines : sur $[-4\,;\,4]$,

$$\boxed{f'(x) \geqslant 0 \text{ sur } \left[-4\,;\,\frac{4}{3}\right] \quad \text{et} \quad f'(x) \leqslant 0 \text{ sur } \left[\frac{4}{3}\,;\,4\right]}$$

(f' ne s'annule qu'en -4 et $\dfrac{4}{3}$).

c. On calcule $f(-4) = 0$, $f(4) = -16 - 16 + 16 + 16 = 0$ et

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = AN \times \frac{MN}{2} = \left(\frac{4}{3} + 4\right) \times \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} \times \frac{16}{9} + 8\right) = \frac{16}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{64}{9} = \frac{512}{27}.$$

x	-4		$\dfrac{4}{3}$		4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\dfrac{512}{27}$	↘	0

5) D'après le tableau de variations, f atteint son maximum en $x = \dfrac{4}{3}$. Alors $y_M = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{16}{9} + 8 = \dfrac{64}{9}$.

L'aire du triangle AMN est maximale lorsque $\boxed{M\left(\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{64}{9}\right)}$; elle vaut alors $\boxed{\dfrac{512}{27} \approx 18{,}96}$ unités d'aire.

Exercice 4

4,5 points

f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Avec $u(x) = x^2 + 3x + 9$, $u'(x) = 2x + 3$, $v(x) = 3x$, $v'(x) = 3$:

$$f'(x) = \frac{(2x+3) \times 3x - (x^2 + 3x + 9) \times 3}{(3x)^2} = \frac{6x^2 + 9x - 3x^2 - 9x - 27}{9x^2}$$
$$= \frac{3x^2 - 27}{9x^2} = \frac{x^2 - 9}{3x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{3x^2}.$$

a. $f'(2) = \dfrac{4 - 9}{3 \times 4} = -\dfrac{5}{12} \neq 0$: le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 n'est pas nul. La proposition est $\boxed{\text{fausse}}$.

b. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $3x^2 > 0$ et $x+3>0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x-3$:

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘	3	↗	

f est croissante sur $[3\,;\,+\infty[$; par exemple $f(6) = \dfrac{7}{2} > f(3) = 3$. La proposition est fausse.

c. D'après le tableau de variations, f admet sur $]0\,;\,+\infty[$ un minimum égal à $f(3) = \dfrac{9+9+9}{9} = 3$.
Donc pour tout $x>0$, $f(x) \geqslant 3$.
Autre méthode : $f(x) - 3 = \dfrac{x^2+3x+9-9x}{3x} = \dfrac{x^2-6x+9}{3x} = \dfrac{(x-3)^2}{3x} \geqslant 0$ pour $x>0$.
La proposition est vraie.

d. $f(6) = \dfrac{36+18+9}{18} = \dfrac{63}{18} = \dfrac{7}{2}$ et $f'(6) = \dfrac{36-9}{3\times 36} = \dfrac{27}{108} = \dfrac{1}{4}$.
La tangente au point d'abscisse 6 a pour équation $y = f'(6)(x-6)+f(6)$:

$$y = \frac{1}{4}(x-6) + \frac{7}{2} = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{1}{4}x + 2.$$

La proposition est vraie.