Calculatrice autorisée

Exercice 1

6,5 points

Claire veut comparer les prix de deux mutuelles entre un assureur A et un assureur B.
Pour chaque assureur, le prix initial proposé est de 300 euros par an en 2019.

Partie A

L'assureur A prévoit une augmentation de 10 euros par an.
On note u_n le prix annuel de la mutuelle de l'assureur A en $2019 + n$.

1) Déterminer les valeurs de u_0 et u_1.

2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4) Quel sera le prix de la mutuelle de l'assureur A en 2030 ?

5) Combien Claire aura-t-elle payé au total en 25 ans si elle choisit l'assureur A ?

Partie B

Dans cette partie, on donnera les résultats arrondis à 10^{-2}.
L'assureur B prévoit une augmentation de $2\,\%$ par an. On note v_n le prix annuel de la mutuelle de l'assureur B en $2019 + n$.

1) Déterminer les valeurs de v_0 et v_1.

2) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

3) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

4) Quel sera le prix de la mutuelle de l'assureur B en 2030 ?

5) Combien Claire aura-t-elle payé au total en 25 ans si elle choisit l'assureur B ?

Partie C

Compléter l'algorithme ci-dessous, écrit en langage Python, pour que la fonction `annee` renvoie l'année au cours de laquelle le prix de la mutuelle de l'assureur B devient pour la première fois plus élevé que le prix de la mutuelle de l'assureur A.

```
def annee():
    u = 300
    v = 300
    n = 0
    while ..............:
        u = ..............
        v = ..............
        n = ..............
    return 2019 + n
```

Exercice 2

4 points

Un youtubeur compte 75 abonnés le 1er janvier 2019. Il remarque que, chaque mois, il en conserve $60\,\%$ et que 100 nouvelles personnes le suivent.

On souhaite déterminer **l'évolution de son nombre d'abonnés**.

On modélise la situation par une suite (U_n), où U_n est le nombre d'abonnés n mois après janvier 2019. On a donc $U_0 = 75$.

1) **a.** Montrer que le nombre d'abonnés au 1er février 2019 est 145.

b. Donner l'expression de U_{n+1} en fonction de U_n, pour tout entier naturel n.

c. À l'aide du tableur de la calculatrice, déterminer comment évolue le nombre d'abonnés et vers quelle valeur semble tendre le nombre d'abonnés lorsque n devient très grand.

2) On définit la suite (V_n), pour tout entier naturel n, par $V_n = U_n - 250$.

a. Prouver que (V_n) est une suite géométrique de raison $0{,}6$.

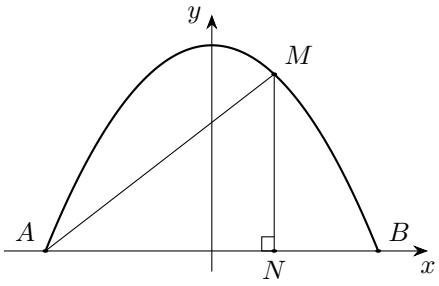
b. Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.

c. Conclure sur le sens de variation de la suite (U_n).

Exercice 3

5 points

La parabole d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 8$ coupe l'axe des abscisses en A et B.
Le point M, d'abscisse x, se déplace sur la parabole entre A et B.
Le point N est le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses.
On cherche à déterminer la position du point M pour laquelle l'aire du triangle AMN est maximale.



1) Déterminer l'abscisse du point A et l'abscisse du point B.

2) Exprimer AN et MN en fonction de x.

3) Montrer que l'aire du triangle AMN peut être modélisée par la fonction f définie sur $[-4\,;\,4]$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - x^2 + 4x + 16.$$

4) **a.** Déterminer f', la fonction dérivée de f.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-4\,;\,4]$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur $[-4\,;\,4]$.

5) Conclure en répondant à la question posée au début de l'exercice.

Exercice 4

4,5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3x+9}{3x}$.

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

a. $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2.

b. f est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

c. Pour tout réel x strictement positif, $f(x) \geqslant 3$.

d. La tangente (d) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 6 a pour équation $y = \dfrac{1}{4}x + 2$.