Exercice 1

3 points

1. On cherche le signe du trinôme $-x^2-2x+8$: $\Delta=(-2)^2-4\times(-1)\times 8=4+32=36=6^2>0$, donc deux racines :

$$x_1=\frac{2-6}{-2}=2 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{2+6}{-2}=-4.$$

Le coefficient de x^2 est $a=-1<0$: le trinôme est strictement positif entre ses racines. Donc $S=]-4\,;\,2[$: réponse A.

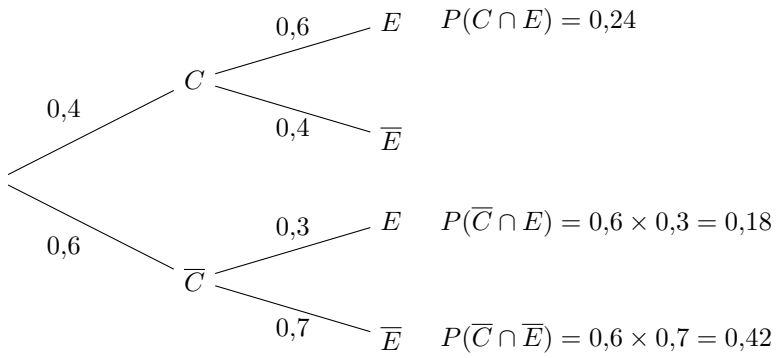
2. Pour tout $n\geqslant 1$, $\dfrac{5\sqrt{n}}{n^2}=\dfrac{5}{n\sqrt{n}}$. Quand n devient très grand, $n\sqrt{n}$ devient très grand, donc $\dfrac{5}{n\sqrt{n}}$ se rapproche de 0 (par exemple, pour $n=100$: $\dfrac{5}{1\,000}=0{,}005$ et $v_{100}=1{,}995$). On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=2$: réponse A.

3. On dispose de n points et des u_n segments qui les relient deux à deux. On ajoute un $(n+1)$-ième point sur le cercle : les anciens segments restent, et le nouveau point est relié à chacun des n points déjà placés, ce qui crée n nouveaux segments. Donc $u_{n+1}=u_n+n$ (contrôle : $u_2=1$, $u_3=1+2=3$, $u_4=3+3=6$, comme sur les figures) : réponse B.

Exercice 2

5,5 points

On résume la situation par un arbre pondéré.



(Sur la branche de C vers E : $P_C(E)=\dfrac{P(C\cap E)}{P(C)}=\dfrac{0{,}24}{0{,}4}=0{,}6$.)

1) D'après l'énoncé : $40\,\%$ des clients demandent une « couleur-soin », $24\,\%$ demandent les deux prestations, et $30\,\%$ de ceux qui ne veulent pas de « couleur-soin » demandent un « effet coup de soleil ». Donc

$$\boxed{P(C)=0{,}4} \qquad \boxed{P(C\cap E)=0{,}24} \qquad \boxed{P_{\overline{C}}(E)=0{,}3}.$$

2) On cherche $P(\overline{C}\cap\overline{E})$. On a $P(\overline{C})=1-0{,}4=0{,}6$ et $P_{\overline{C}}(\overline{E})=1-0{,}3=0{,}7$, donc

$$P(\overline{C}\cap\overline{E})=P(\overline{C})\times P_{\overline{C}}(\overline{E})=0{,}6\times 0{,}7=\boxed{0{,}42}.$$

3) C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(C \cap E) + P(\overline{C} \cap E) = 0{,}24 + 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}24 + 0{,}18 = \boxed{0{,}42}.$$

4) On compare $P(C) \times P(E)$ et $P(C \cap E)$:

$$P(C) \times P(E) = 0{,}4 \times 0{,}42 = 0{,}168 \qquad \text{et} \qquad P(C \cap E) = 0{,}24.$$

Comme $0{,}168 \neq 0{,}24$, les événements C et E ne sont pas indépendants.
(Autre méthode : $P_C(E) = 0{,}6 \neq P(E) = 0{,}42$.)

Exercice 3

5,5 points

1) Pour la suite (u_n), définie de façon explicite :

$$u_3 = \frac{8 \times 3 - 4}{3 + 1} = \frac{20}{4} = \boxed{5}.$$

Pour la suite (v_n), définie par récurrence, on calcule les termes de proche en proche :

$$v_1 = 0{,}5 \times 0 + 3{,}5 = 3{,}5; \qquad v_2 = 0{,}5 \times 3{,}5 + 3{,}5 = 1{,}75 + 3{,}5 = 5{,}25;$$

$$v_3 = 0{,}5 \times 5{,}25 + 3{,}5 = 2{,}625 + 3{,}5 = \boxed{6{,}125}.$$

2) Le premier terme est u_0, donc le 100^{e} terme de chaque suite est celui d'indice 99.
Pour (u_n), définie de façon explicite, on calcule directement :

$$u_{99} = \frac{8 \times 99 - 4}{99 + 1} = \frac{788}{100} = \boxed{7{,}88}.$$

Pour (v_n), définie par récurrence, on utilise le mode « suite » de la calculatrice (ou un tableau de valeurs) : on entre $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = 0{,}5\,v_n + 3{,}5$, puis on lit le terme d'indice 99 :

$$\boxed{v_{99} \approx 7{,}00}.$$

(Les termes se rapprochent très vite de 7 : $v_{10} \approx 6{,}993$, $v_{20} \approx 6{,}999\,993$; la calculatrice affiche 7 pour v_{99}.)

3) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{8(n+1) - 4}{(n+1) + 1} = \dfrac{8n + 4}{n + 2}$. Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{8n + 4}{n + 2} - \frac{8n - 4}{n + 1} = \frac{(8n + 4)(n + 1) - (8n - 4)(n + 2)}{(n + 1)(n + 2)}.$$

Au numérateur : $(8n + 4)(n + 1) = 8n^2 + 12n + 4$ et $(8n - 4)(n + 2) = 8n^2 + 12n - 8$, d'où

$$u_{n+1} - u_n = \frac{8n^2 + 12n + 4 - 8n^2 - 12n + 8}{(n + 1)(n + 2)} = \frac{12}{(n + 1)(n + 2)}.$$

Pour tout entier naturel n, on a $n + 1 > 0$ et $n + 2 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite (u_n) est strictement croissante.

4) La boucle `while` se répète tant que $u < v$, c'est-à-dire tant que $u_n < v_n$; elle s'arrête au premier rang n pour lequel $u_n \geqslant v_n$, et le programme renvoie ce rang.

Le programme renvoie 11 : cela signifie que $u_{11} \geqslant v_{11}$ (on a d'ailleurs $u_{11} = \dfrac{84}{12} = 7$). L'affirmation « pour tout entier naturel n, $u_n < v_n$ » est donc fausse pour $n = 11$: c'est Dominique qui a raison.

Exercice 4

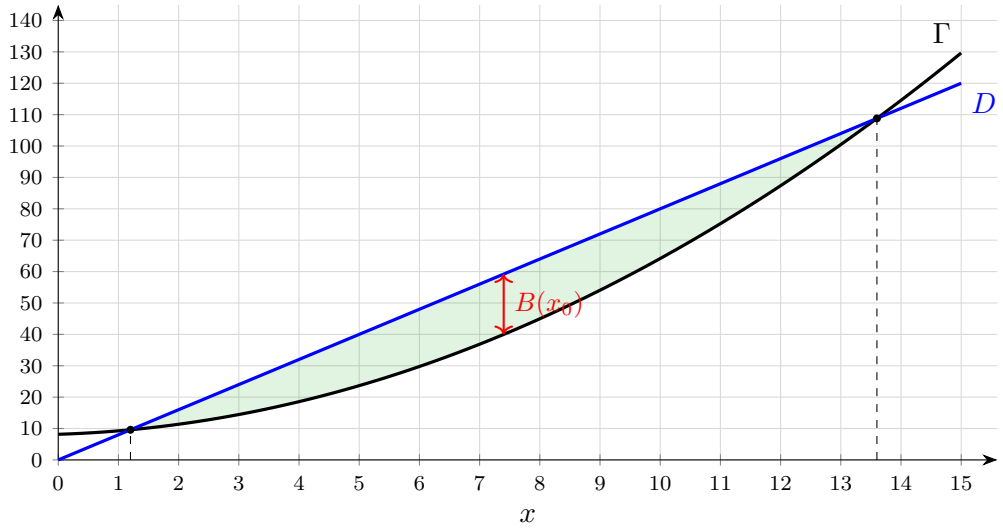
6 points

1) On compare les bénéfices (recette moins coût), en milliers d'euros. Chaque millier d'articles rapporte 8 milliers d'euros.

- Pour $4\,000$ articles ($x = 4$) : $C(4) = 0{,}5 \times 16 + 0{,}6 \times 4 + 8{,}16 = 18{,}56$ et la recette vaut $8 \times 4 = 32$. Bénéfice : $32 - 18{,}56 = 13{,}44$, soit $13\,440$ €.
- Pour $12\,000$ articles ($x = 12$) : $C(12) = 0{,}5 \times 144 + 0{,}6 \times 12 + 8{,}16 = 87{,}36$ et la recette vaut $8 \times 12 = 96$. Bénéfice : $96 - 87{,}36 = 8{,}64$, soit $8\,640$ €.

Il est donc plus avantageux de fabriquer et vendre $4\,000$ articles.

2) **a.** $R(x) = 8x$ est une fonction linéaire : D est la droite passant par l'origine et, par exemple, par le point $(15\,;\,120)$.



b. Le bénéfice est positif lorsque la recette est supérieure ou égale au coût, c'est-à-dire lorsque la droite D est au-dessus de la courbe Γ (zone colorée). On lit que D et Γ se coupent aux points d'abscisses environ $1{,}2$ et $13{,}6$:

- la production doit se situer dans l'intervalle $[1{,}2\,;\,13{,}6]$ environ (entre $1\,200$ et $13\,600$ articles environ) ;
- le bénéfice est maximal lorsque l'écart vertical entre D et Γ est le plus grand, soit pour $x_0 \approx 7{,}4$.

3) **a.** Pour tout $x \in]0\,;\,15]$:

$$B(x) = R(x) - C(x) = 8x - \left(0{,}5x^2 + 0{,}6x + 8{,}16\right) = 8x - 0{,}5x^2 - 0{,}6x - 8{,}16,$$

$$\boxed{B(x) = -0{,}5x^2 + 7{,}4x - 8{,}16}.$$

b. B est un trinôme avec $a = -0{,}5$, $b = 7{,}4$ et $c = -8{,}16$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7{,}4^2 - 4 \times (-0{,}5) \times (-8{,}16) = 54{,}76 - 16{,}32 = 38{,}44 = 6{,}2^2 > 0.$$

Deux racines : $x_1 = \dfrac{-7{,}4 + 6{,}2}{2 \times (-0{,}5)} = \dfrac{-1{,}2}{-1} = 1{,}2$ et $x_2 = \dfrac{-7{,}4 - 6{,}2}{-1} = 13{,}6$.

Le trinôme est du signe de a ($a < 0$) à l'extérieur des racines et du signe contraire entre elles :

x	0		$1{,}2$		$13{,}6$		15
$B(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

L'entreprise réalise un bénéfice positif pour $x \in \boxed{[1{,}2\,;\,13{,}6]}$, c'est-à-dire pour une production comprise entre $1\,200$ et $13\,600$ articles (ce qui confirme la lecture graphique).

c. B est un trinôme avec $a = -0{,}5 < 0$: sa courbe est une parabole tournée vers le bas, de sommet d'abscisse

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{7{,}4}{2 \times (-0{,}5)} = 7{,}4$$

$$B(7{,}4) = -0{,}5 \times 7{,}4^2 + 7{,}4 \times 7{,}4 - 8{,}16 = -27{,}38 + 54{,}76 - 8{,}16 = 19{,}22.$$

Avec $B(15) = -0{,}5 \times 225 + 7{,}4 \times 15 - 8{,}16 = -112{,}5 + 111 - 8{,}16 = -9{,}66$:

x	0		$7{,}4$		15
B	‖	↗	$19{,}22$	↘	$-9{,}66$

B est strictement croissante sur $]0\,;\,7{,}4]$ et strictement décroissante sur $[7{,}4\,;\,15]$; son maximum est $B(7{,}4) = 19{,}22$.

Il faut donc fabriquer et vendre $\boxed{7\,400 \text{ articles}}$ par mois ; le bénéfice maximal est alors de $\boxed{19\,220 \text{ €}}$.