Exercice 1

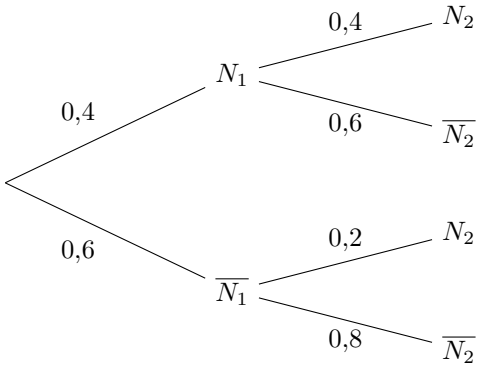
6 points

Partie A

1) **a.** Si l'on a pioché une boule blanche dans U_1 et qu'on l'a placée dans U_2, l'urne U_2 contient alors 1 boule noire et $3+1=4$ boules blanches, soit 5 boules. Les tirages étant équiprobables :

$$P_{\overline{N_1}}(N_2) = \frac{1}{5} = \boxed{0{,}2}.$$

b. L'urne U_1 contient 4 boules noires sur 10 : $P(N_1) = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$ et $P\left(\overline{N_1}\right) = 0{,}6$.
Si l'on a pioché une boule noire dans U_1, l'urne U_2 contient 2 boules noires et 3 boules blanches : $P_{N_1}(N_2) = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$ et $P_{N_1}\left(\overline{N_2}\right) = 0{,}6$.
Enfin $P_{\overline{N_1}}\left(\overline{N_2}\right) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.



2) $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) = 0{,}4 \times 0{,}4 = \boxed{0{,}16}$.

3) N_1 et $\overline{N_1}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(N_2) = P(N_1 \cap N_2) + P\left(\overline{N_1} \cap N_2\right) = 0{,}16 + 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}16 + 0{,}12 = \boxed{0{,}28}.$$

4) On cherche $P_{N_2}\left(\overline{N_1}\right)$:

$$P_{N_2}\left(\overline{N_1}\right) = \frac{P\left(\overline{N_1} \cap N_2\right)}{P(N_2)} = \frac{0{,}12}{0{,}28} = \frac{3}{7} \approx \boxed{0{,}43}.$$

Partie B

1) On répète n fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont le succès « piocher une boule noire dans l'urne U_2 » a pour probabilité $p = 0{,}28$. La variable X compte le nombre de succès, donc X suit la $\boxed{\text{loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p = 0{,}28}$.

2) Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} 1 - 0{,}72^n \geqslant 0{,}9 &\iff 0{,}72^n \leqslant 0{,}1 \\ &\iff n\ln(0{,}72) \leqslant \ln(0{,}1) \quad \text{(la fonction } \ln \text{ est strictement croissante)} \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}72)} \quad \text{(on divise par } \ln(0{,}72) < 0\text{)} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}72)} \approx 7{,}01$, donc le plus petit entier qui convient est $\boxed{n = 8}$.
Contrôle : $1 - 0{,}72^7 \approx 0{,}8997 < 0{,}9$ et $1 - 0{,}72^8 \approx 0{,}9278 \geqslant 0{,}9$.

3) $0{,}72^n = P(X = 0)$ est la probabilité de ne jamais piocher de boule noire dans U_2 au cours des n expériences, donc $1 - 0{,}72^n = P(X \geqslant 1)$ est la probabilité de piocher au moins une fois une boule noire dans U_2.
Conclusion : il faut répéter l'expérience **au moins** 8 **fois** pour que la probabilité de piocher au moins une boule noire dans l'urne U_2 soit supérieure ou égale à $0{,}9$.

Partie C

1) Un tirage simultané de deux boules parmi les 10 boules de U_1 est une combinaison de 2 éléments parmi 10 :

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = \boxed{45} \text{ tirages possibles.}$$

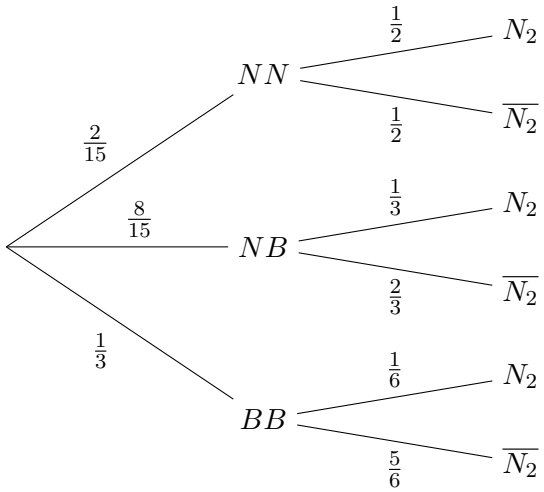
2) On choisit une boule noire parmi les 4 noires et une boule blanche parmi les 6 blanches :

$$\binom{4}{1} \times \binom{6}{1} = 4 \times 6 = \boxed{24} \text{ tirages.}$$

3) Les tirages étant équiprobables, on distingue trois cas pour les deux boules placées dans U_2 :

- deux noires (évènement NN) : $P(NN) = \dfrac{\binom{4}{2}}{45} = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$; l'urne U_2 contient alors 3 noires et 3 blanches, donc $P_{NN}(N_2) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$;
- une noire et une blanche (évènement NB) : $P(NB) = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$; U_2 contient 2 noires et 4 blanches, donc $P_{NB}(N_2) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$;
- deux blanches (évènement BB) : $P(BB) = \dfrac{\binom{6}{2}}{45} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$; U_2 contient 1 noire et 5 blanches, donc $P_{BB}(N_2) = \dfrac{1}{6}$.

Contrôle : $6 + 24 + 15 = 45$.



NN, NB et BB forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(N_2) = \frac{2}{15} \times \frac{1}{2} + \frac{8}{15} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{6}{90} + \frac{16}{90} + \frac{5}{90} = \frac{27}{90} = \boxed{0{,}3}.$$

Comme $0{,}3 > 0{,}28$, **oui** : avec cette nouvelle expérience, la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est supérieure à celle de la partie A.

Exercice 2

5 points

1) **a.** $u_1 = f(u_0) = f(-1) = (-1)^3\,\mathrm{e}^{-1} = \boxed{-\mathrm{e}^{-1} \approx -0{,}368}$.

$u_2 = f(u_1) = \left(-\mathrm{e}^{-1}\right)^3 \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}} = -\mathrm{e}^{-3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}} = \boxed{-\mathrm{e}^{-3-\mathrm{e}^{-1}} \approx -0{,}034}$.

b. La boucle `for` est exécutée n fois et remplace à chaque passage `u` par $f(\mathtt{u})$, en partant de $u_0 = -1$: `fonc(n)` renvoie u_n. Donc `fonc(2)` renvoie u_2 :

$$\boxed{\texttt{fonc(2)} \approx -0{,}034}.$$

2) **a.** f est le produit des fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$, dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2\,\mathrm{e}^x + x^3\,\mathrm{e}^x = \boxed{x^2\,\mathrm{e}^x\,(x+3)}.$$

b. *Signe de f'* : pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ (nul seulement en 0) et $\mathrm{e}^x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $x+3$ (et nul en 0). Ainsi $f'(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty\,;-3]$ et $f'(x) \geqslant 0$ sur $[-3\,;+\infty[$, f' ne s'annulant qu'en -3 et 0 : f est **strictement décroissante sur** $]-\infty\,;-3]$ et **strictement croissante sur** $[-3\,;+\infty[$.

Minimum : $f(-3) = (-3)^3\,\mathrm{e}^{-3} = -27\,\mathrm{e}^{-3}$.

Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en $-\infty$: par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\,\mathrm{e}^x = 0$.

On retrouve bien le tableau de variations de l'énoncé :

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
f	0	↘	$-27\,\mathrm{e}^{-3}$	↗		↗	$+\infty$

c. Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$: « $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$ ».

Initialisation : $u_0 = -1$ et $u_1 = -\mathrm{e}^{-1} \approx -0{,}368$, donc $-1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit n un entier naturel tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$. La fonction f est croissante sur $[-3\,;+\infty[$, donc sur $[-1\,;0]$; on peut appliquer f sans changer le sens des inégalités :

$$\begin{aligned} -1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0 &\implies f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(0) \quad (f \text{ croissante sur } [-1\,;0]) \\ &\iff -\mathrm{e}^{-1} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0. \end{aligned}$$

Comme $-\mathrm{e}^{-1} \geqslant -1$, on obtient $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire ; par récurrence, pour tout entier naturel n,

$$\boxed{-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0.}$$

d. D'après la question précédente, pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$: la suite (u_n) est croissante ; et $u_n \leqslant 0$: elle est majorée par 0.
D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) $\boxed{\text{converge}}$ vers une limite ℓ telle que $-1 \leqslant \ell \leqslant 0$ (passage à la limite dans les inégalités larges).

e. Pour tout réel x :

$$f(x) = x \iff x^3\,\mathrm{e}^x - x = 0 \iff x\left(x^2\,\mathrm{e}^x - 1\right) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x^2\,\mathrm{e}^x - 1 = 0.$$

L'unique solution de $x^2\,\mathrm{e}^x - 1 = 0$ est strictement supérieure à $\dfrac{1}{2}$, donc elle n'appartient pas à $[-1\,;\,0]$. Comme $\ell \in [-1\,;\,0]$ est solution de $f(x) = x$, on obtient

$$\boxed{\ell = 0}.$$

Exercice 3

5 points

1) (d_1) passe par $A(1\,;\,2\,;\,-1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$; une représentation paramétrique de (d_1) est :

$$\boxed{\begin{cases}x = 1 + t'\\ y = 2 + 2t' \qquad t' \in \mathbb{R}.\\ z = -1\end{cases}}$$

2) D'après sa représentation paramétrique, (d_2) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Les droites ne sont pas parallèles : la première coordonnée de $\overrightarrow{u_2}$ est nulle mais pas celle de $\overrightarrow{u_1}$, donc s'il existait k tel que $\overrightarrow{u_2} = k\,\overrightarrow{u_1}$, on aurait $k = 0$, puis $\overrightarrow{u_2} = \vec{0}$, ce qui est faux. Les vecteurs ne sont pas colinéaires.
Les droites ne sont pas sécantes : un point commun correspondrait à des réels t et t' tels que

$$\begin{cases}1 + t' = 0\\ 2 + 2t' = 1 + t\\ -1 = 2 + t\end{cases} \iff \begin{cases}t' = -1\\ t = -1\\ t = -3\end{cases}$$

ce qui est impossible (t ne peut valoir à la fois -1 et -3). Le système n'a pas de solution.
Deux droites ni parallèles ni sécantes sont $\boxed{\text{non coplanaires}}$.

3) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$. On a

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{u_1} = -2\times 1 + 1\times 2 + 5\times 0 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n}\cdot\vec{w} = -2\times 2 + 1\times(-1) + 5\times 1 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$: c'est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Une équation de $\mathcal{P}$ est donc de la forme $-2x + y + 5z + d = 0$.
Comme $A \in \mathcal{P}$: $-2\times 1 + 2 + 5\times(-1) + d = 0 \iff d = 5$. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{P} : -2x + y + 5z + 5 = 0.}$$

4) **a.** $\vec{n}\cdot\overrightarrow{u_2} = -2\times 0 + 1\times 1 + 5\times 1 = 6 \neq 0$: le vecteur directeur de (d_2) n'est pas orthogonal au vecteur normal de $\mathcal{P}$, donc (d_2) n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$: la droite (d_2) et le plan $\mathcal{P}$ sont $\boxed{\text{sécants}}$.

b. Le point de (d_2) de paramètre t a pour coordonnées $(0\,;\,1+t\,;\,2+t)$; il appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si

$$-2\times 0 + (1+t) + 5(2+t) + 5 = 0 \iff 6t + 16 = 0 \iff t = -\frac{8}{3}.$$

On obtient $x_F = 0$, $y_F = 1 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3}$, $z_F = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$, donc $\boxed{F\left(0\,;\,-\frac{5}{3}\,;\,-\frac{2}{3}\right)}$.

5) **a.** $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 0-\left(-\frac{2}{3}\right) \\ -\frac{5}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right) \\ -\frac{2}{3}-(-1) \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Alors

$$\overrightarrow{EF}\cdot\vec{u_1} = \frac{2}{3}\times 1 - \frac{1}{3}\times 2 + \frac{1}{3}\times 0 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EF}\cdot\vec{u_2} = \frac{2}{3}\times 0 - \frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times 1 = 0.$$

La droite (EF) est donc orthogonale à (d_1) et à (d_2). De plus $E \in (d_1)$ (c'est le point de paramètre $t' = -\frac{5}{3}$) et $F \in (d_2)$.
D'après la définition de l'énoncé, $\boxed{EF \text{ est la distance entre } (d_1) \text{ et } (d_2)}$.

b.

$$EF = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+1+1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}} \approx 0{,}82.$$

Exercice 4

4 points

1) Pour $x > 0$: $f(x) = 0 \iff 2\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = 0 \iff x = 1$.
La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\boxed{1}$.

2) F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, en dérivant le produit $x\ln(x)$:

$$F'(x) = 2\left[1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x} - 1\right] = 2\left[\ln(x) + 1 - 1\right] = 2\ln(x) = f(x).$$

Donc $\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur }]0\,;+\infty[}$.

3) Le domaine noirci est limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.
Pour $x \geqslant 1$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant 0$: l'aire, en unités d'aire, est

$$\int_1^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x_0) - F(1) = 2\left[x_0\ln(x_0) - x_0\right] - 2\left[1\times\ln(1) - 1\right] = \boxed{2\left(x_0\ln(x_0) - x_0 + 1\right)}.$$

4) *Équation de la tangente* T. Pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{2}{x}$, donc $f'(x_0) = \frac{2}{x_0}$ et $f(x_0) = 2\ln(x_0)$. La tangente T a pour équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \frac{2}{x_0}(x - x_0) + 2\ln(x_0) = \frac{2}{x_0}x + 2\ln(x_0) - 2.$$

Point A. A est sur l'axe des ordonnées : $x_A = 0$, donc $y_A = 2\ln(x_0) - 2$.
Point B. B est le projeté orthogonal de $M\left(x_0\,;\,2\ln(x_0)\right)$ sur l'axe des ordonnées : $B\left(0\,;\,2\ln(x_0)\right)$.
Longueur AB. A et B ont la même abscisse, donc

$$AB = |y_B - y_A| = |2\ln(x_0) - (2\ln(x_0) - 2)| = |2| = \boxed{2}.$$

La longueur AB vaut 2 quel que soit $x_0 > 1$: c'est bien une constante.