Calculatrice autorisée en mode examen

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. La qualité de la rédaction et le soin apporté à la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

Exercice 1

6 points

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches.
L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.
On considère l'expérience aléatoire suivante : on pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2, puis on pioche au hasard une boule dans U_2.
On note :

- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 »;
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

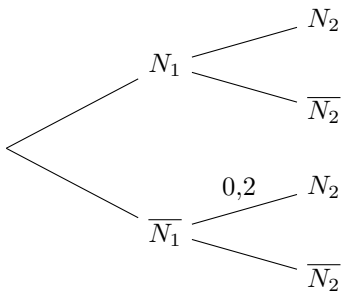
Pour tout évènement A, on note $\overline{A}$ son évènement contraire.

Partie A

1) On considère l'arbre de probabilités ci-contre.

a. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est $0{,}2$.

b. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des évènements concernés, sous forme décimale.



2) Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2.

3) Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à $0{,}28$.

4) On a pioché une boule noire dans l'urne U_2.
Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1. On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2}.

Partie B

n désigne un entier naturel non nul.
L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2, entre chaque expérience.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2.
On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à $0{,}28$ et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à $0{,}72$.

1) Déterminer la loi de probabilité suivie par X. Justifier votre réponse.

2) Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que : $1 - 0{,}72^n \geqslant 0{,}9$.

3) Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.

Partie C

Dans cette partie, les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2.
On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante : on pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2, puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2.

1) Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?

2) Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?

3) La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est-elle supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A ? Justifier votre réponse.
On pourra s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette expérience.

Exercice 2

5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3\,\mathrm{e}^x.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1) On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Calculer u_1 puis u_2.
On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs approchées à 10^{-3}.

b. On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

```
def fonc(n):
    u = -1
    for i in range(n):
        u = u**3*exp(u)
    return u
```

Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc(2)` arrondie à 10^{-3}.

2) **a.** Démontrer que, pour tout x réel, on a $f'(x) = x^2\,\mathrm{e}^x\,(x+3)$.

b. Justifier que le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ est celui représenté ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-27\,\mathrm{e}^{-3}$	$\nearrow$	$+\infty$

c. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0.$$

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

e. On note ℓ la limite de la suite (u_n). On rappelle que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer ℓ. (Pour cela, on admettra que l'équation $x^2\,\mathrm{e}^x - 1 = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$ et que celle-ci est strictement supérieure à $\dfrac{1}{2}$.)

Exercice 3

5 points

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.
Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires de l'espace (d_1) et (d_2) est la longueur du segment $[EF]$, où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et à (d_2).

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

Soient (d_1) la droite passant par $A(1\,;\,2\,;\,-1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (d_1).

2) Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

3) Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $-2x + y + 5z + 5 = 0$.

4) **a.** Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.

b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathcal{P}$.
Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0\,;\,-\dfrac{5}{3}\,;\,-\dfrac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3}\,;\,-\dfrac{4}{3}\,;\,-1\right)$.

5) **a.** Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

b. Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

Exercice 4

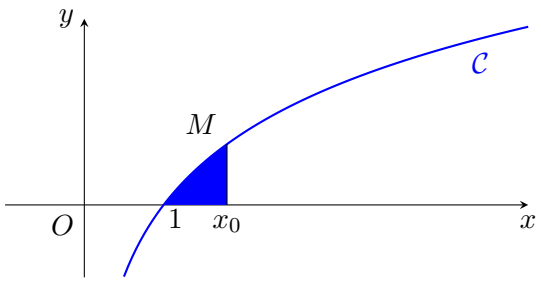
4 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x)$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

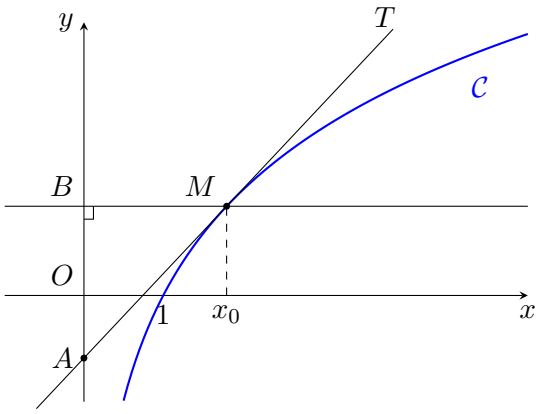
1) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.

2) Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = 2\left[x\ln(x) - x\right]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3) En déduire l'aire du domaine noirci en fonction de x_0.



On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point M d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4) Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera.
Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.