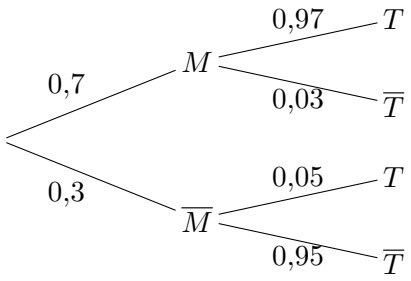
Exercice 1

6 points

Partie A

1) $70\,\%$ des coyotes sont malades : $P(M) = 0{,}7$ et $P(\overline{M}) = 0{,}3$.
Si le coyote est malade, le test est positif dans $97\,\%$ des cas : $P_M(T) = 0{,}97$, donc $P_M(\overline{T}) = 0{,}03$.
Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans $95\,\%$ des cas : $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}95$, donc $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}05$.



2) $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}7 \times 0{,}97 = \boxed{0{,}679}$.

3) Les évènements M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0{,}679 + 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}679 + 0{,}015 = \boxed{0{,}694}.$$

4) La valeur prédictive positive est $P_T(M)$:

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}679}{0{,}694} \approx \boxed{0{,}978}.$$

5) **a.** La « valeur prédictive négative du test » est la probabilité que le coyote ne soit pas malade sachant que son test est négatif, c'est-à-dire $P_{\overline{T}}(\overline{M})$.
$P(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0{,}3 \times 0{,}95 = 0{,}285$ et $P(\overline{T}) = 1 - 0{,}694 = 0{,}306$, donc

$$P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{0{,}285}{0{,}306} \approx \boxed{0{,}931}.$$

b. La valeur prédictive positive ($\approx 0{,}978$) est supérieure à la valeur prédictive négative ($\approx 0{,}931$).
Un test positif est donc plus fiable qu'un test négatif : un coyote dont le test est positif est malade dans environ $97{,}8\,\%$ des cas, alors qu'un coyote dont le test est négatif est tout de même malade dans environ $6{,}9\,\%$ des cas.

Partie B

1) **a.** Pour chaque coyote capturé, on a une épreuve de Bernoulli de succès « le test est positif », de probabilité $p = 0{,}694$.
Le choix étant assimilé à un tirage avec remise, on répète 5 fois cette épreuve de manière

identique et indépendante. X compte le nombre de succès, donc

$$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(5\,;\,0{,}694).}$$

b. $P(X=1) = \binom{5}{1} \times 0{,}694^1 \times 0{,}306^4 = 5 \times 0{,}694 \times 0{,}306^4 \approx \boxed{0{,}03}$.

c. $P(X \geqslant 4) = P(X=4) + P(X=5) = \binom{5}{4} \times 0{,}694^4 \times 0{,}306 + 0{,}694^5 \approx 0{,}355 + 0{,}161$, soit

$$P(X \geqslant 4) \approx 0{,}516.$$

Comme $0{,}516 > 0{,}5$, $\boxed{\text{l'affirmation du vétérinaire est vraie.}}$

2) On capture n coyotes ($n \geqslant 1$), dans les mêmes conditions. Le nombre Y de coyotes ayant un test positif suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,0{,}694)$ et

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - 0{,}306^n.$$

On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0{,}306^n > 0{,}99$, c'est-à-dire $0{,}306^n < 0{,}01$.
La suite $(0{,}306^n)$ est décroissante (raison comprise entre 0 et 1). À la calculatrice :

$$0{,}306^3 \approx 0{,}0287 > 0{,}01 \qquad \text{et} \qquad 0{,}306^4 \approx 0{,}0088 < 0{,}01.$$

Variante avec le logarithme : $0{,}306^n < 0{,}01 \iff n\ln(0{,}306) < \ln(0{,}01) \iff n > \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}306)} \approx 3{,}89$ (on divise par $\ln(0{,}306) < 0$).
Les vétérinaires doivent capturer $\boxed{\text{au moins } 4 \text{ coyotes.}}$

Exercice 2

6 points

Partie A

1) **a.** $f(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}67x$ est un polynôme : sa limite en $+\infty$ est celle de son terme de plus haut degré $-0{,}05x^2$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$.

b. Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = 0{,}05(-2x + 13{,}4) = -0{,}1x + 0{,}67$.
$f'(x) \geqslant 0 \iff -0{,}1x + 0{,}67 \geqslant 0 \iff x \leqslant 6{,}7$.
f est donc croissante sur $[0\,;\,6{,}7]$ et décroissante sur $[6{,}7\,;\,+\infty[$, avec $f(0) = 0$ et $f(6{,}7) = 0{,}05\left(-6{,}7^2 + 13{,}4 \times 6{,}7\right) = 0{,}05 \times 44{,}89 = 2{,}2445$.

x	0		$6{,}7$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$2{,}2445$	↘	$-\infty$

c. $f(x) = 0 \iff 0{,}05\,x\,(-x + 13{,}4) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 13{,}4$.
$\mathcal{S} = \boxed{\{0\,;\,13{,}4\}}$.

2) **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(-0{,}16x + 2{,}3) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{0{,}2x} = +\infty$ (car $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty$).
Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}(-0{,}16x + 2{,}3)\,\mathrm{e}^{0{,}2x} = -\infty$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \boxed{-\infty}$.

b. On pose $u(x) = -0{,}16x + 2{,}3$ et $v(x) = \mathrm{e}^{0{,}2x}$: $u'(x) = -0{,}16$ et $v'(x) = 0{,}2\,\mathrm{e}^{0{,}2x}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - 0 \\ &= -0{,}16\,\mathrm{e}^{0{,}2x} + (-0{,}16x + 2{,}3) \times 0{,}2\,\mathrm{e}^{0{,}2x} \\ &= (-0{,}16 - 0{,}032x + 0{,}46)\,\mathrm{e}^{0{,}2x} \\ &= \boxed{(-0{,}032x + 0{,}3)\,\mathrm{e}^{0{,}2x}}. \end{aligned}$$

c. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{0{,}2x} > 0$: $g'(x)$ est du signe de $-0{,}032x + 0{,}3$.
$-0{,}032x + 0{,}3 \geqslant 0 \iff x \leqslant \dfrac{0{,}3}{0{,}032} \iff x \leqslant 9{,}375$.
g est croissante sur $[0\,;\,9{,}375]$ et décroissante sur $[9{,}375\,;\,+\infty[$, avec $g(0) = 2{,}3 \times 1 - 2{,}3 = 0$ et

$$g(9{,}375) = (-0{,}16 \times 9{,}375 + 2{,}3)\,\mathrm{e}^{0{,}2\times 9{,}375} - 2{,}3 = 0{,}8\,\mathrm{e}^{1{,}875} - 2{,}3 \approx 2{,}92.$$

x	0		$9{,}375$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	↗	$0{,}8\,\mathrm{e}^{1{,}875} - 2{,}3$	↘	$-\infty$

Le maximum de g vaut $\boxed{0{,}8\,\mathrm{e}^{1{,}875} - 2{,}3 \approx 2{,}92}$, atteint en $x = 9{,}375$.

Partie B

1) **a.** D'après la partie A, le maximum de f sur $[0\,;\,13{,}4]$ est $f(6{,}7) = 2{,}2445$ dizaines de yards.
La hauteur maximale atteinte est $2{,}2445 \times 10 = 22{,}445$ yards, soit $\boxed{\text{environ } 22{,}4 \text{ yards.}}$

b. $f'(0) = -0{,}1 \times 0 + 0{,}67 = \boxed{0{,}67}$.

c. L'angle de décollage d vérifie $\tan(d) = f'(0) = 0{,}67$. D'après la colonne G du tableau, $d \approx 33{,}82$, soit $\boxed{d \approx 33{,}8°}$.

d. La courbe $\mathscr{C}_f$ est une parabole, **symétrique par rapport à la droite d'équation** $x = 6{,}7$ (abscisse du sommet, milieu de $[0\,;\,13{,}4]$).
Les tangentes en 0 et en $13{,}4$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à cette droite : leurs coefficients directeurs sont opposés ($f'(13{,}4) = -1{,}34 + 0{,}67 = -0{,}67 = -f'(0)$).
Les angles de décollage et d'atterrissage sont donc égaux.

2) **a.** D'après la partie A, le maximum de g est environ $2{,}92$ dizaines de yards, atteint pour $x = 9{,}375 \in [0\,;\,13{,}4]$.
La hauteur maximale atteinte est $\boxed{\text{environ } 29{,}2 \text{ yards.}}$

b. **i.** L'angle de décollage d vérifie $\tan(d) = g'(0) = 0{,}3$. D'après la colonne G du tableau (ligne 5), $d \approx 16{,}70$, soit $\boxed{d \approx 16{,}7°}$.

ii. L'angle d'atterrissage a vérifie $\tan(a) = -g'(13{,}4) \approx 1{,}88$.
À la calculatrice (mode degré) : $a \approx \arctan(1{,}88) \approx 61{,}99$, donc $\boxed{a \approx 62°}$ à l'unité près.

Partie C

On rassemble les résultats des deux modèles et les moyennes observées :

	Décollage	Hauteur maximale	Atterrissage	Distance
Joueurs professionnels	$24°$	32 yards	$52°$	134 yards
Modèle 1 (fonction f)	$33{,}8°$	$22{,}4$ yards	$33{,}8°$	134 yards
Modèle 2 (fonction g)	$16{,}7°$	$29{,}2$ yards	$62°$	134 yards

Les deux modèles donnent la même distance horizontale ($13{,}4$ dizaines de yards). Pour les trois autres grandeurs, les écarts avec les moyennes observées sont :

- modèle 1 : $9{,}8°$ au décollage, $9{,}6$ yards en hauteur, $18{,}2°$ à l'atterrissage ;
- modèle 2 : $7{,}3°$ au décollage, $2{,}8$ yards en hauteur, $10°$ à l'atterrissage.

Le modèle 2 est plus proche des observations pour chacune des trois grandeurs :

$\boxed{\text{la seconde modélisation (fonction } g\text{) semble la plus adaptée.}}$

Exercice 3

8 points

Partie 1

1) **a.** $f(x) = 1{,}9x - 1{,}9x^2$, donc pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $f'(x) = 1{,}9 - 3{,}8x$.
$f'(x) \geqslant 0 \iff 1{,}9 \geqslant 3{,}8x \iff x \leqslant \dfrac{1}{2}$.
$f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1{,}9 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = 0{,}475$ et $f(1) = 0$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$0{,}475$	↘	0

f est $\boxed{\text{croissante sur } \left[0\,;\,\tfrac{1}{2}\right] \text{ et décroissante sur } \left[\tfrac{1}{2}\,;\,1\right].}$

b. D'après le tableau de variations, sur $[0\,;\,1]$, f admet pour minimum 0 et pour maximum $0{,}475$.
Donc si $x \in [0\,;\,1]$, alors $0 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}475 \leqslant 1$, c'est-à-dire $\boxed{f(x) \in [0\,;\,1]}$.

2) Sur le graphique, les termes u_0, u_1, u_2, u_3 augmentent et semblent se rapprocher de l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de D, proche de $0{,}47$.
Conjecture : $\boxed{(u_n) \text{ est croissante et converge vers un réel proche de } 0{,}47.}$

3) **a.** Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ ».

Initialisation. $u_0 = 0{,}1$ et $u_1 = 1{,}9 \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}171$. On a bien $0 \leqslant 0{,}1 \leqslant 0{,}171 \leqslant \dfrac{1}{2}$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. La fonction f est croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ (question 1.a), donc elle conserve l'ordre :

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \\ \Longrightarrow\ & f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right) && (f \text{ croissante sur } \left[0\,;\,\tfrac{1}{2}\right]) \\ \Longleftrightarrow\ & 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0{,}475 && (\text{car } u_{k+1} = f(u_k)) \end{aligned}$$

et $0{,}475 \leqslant \dfrac{1}{2}$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire : pour tout entier naturel n, $\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}}$.

b. D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante ($u_n \leqslant u_{n+1}$) et majorée par $\dfrac{1}{2}$.
D'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } l.}$

c. $l = 1{,}9\,l\,(1-l) \iff l\left(1{,}9(1-l)-1\right) = 0 \iff l\,(0{,}9-1{,}9\,l) = 0 \iff l = 0$ ou $l = \dfrac{0{,}9}{1{,}9} = \dfrac{9}{19}$.
Or (u_n) est croissante, donc pour tout n, $u_n \geqslant u_0 = 0{,}1$; par passage à la limite, $l \geqslant 0{,}1$, donc $l \neq 0$.
Ainsi $\boxed{l = \dfrac{9}{19} \approx 0{,}474}$, ce qui confirme la conjecture.

Partie 2

1) Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$. De plus, pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.
D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{(u_n) \text{ converge et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

2) **a.** Après n passages dans la boucle, la variable `u` contient u_n. La boucle s'arrête dès que $u_n \leqslant 10^{-p}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $10^{-p} > 0$, l'intervalle $]-10^{-p}\,;\,10^{-p}[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : il existe donc un entier n tel que $u_n < 10^{-p}$.
$\boxed{\text{La condition } u > 10^{-p} \text{ finit par être fausse : la boucle s'arrête.}}$

b. `algo(4)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-4}$. À la calculatrice (ou en exécutant la fonction) :

n	0	1	2	$\cdots$	10	11
u_n	$0{,}25$	$0{,}09375$	$\approx 0{,}0425$	$\cdots$	$\approx 1{,}53 \times 10^{-4}$	$\approx 7{,}63 \times 10^{-5}$

Les termes $u_0, \ldots, u_{10}$ sont tous strictement supérieurs à 10^{-4} (la suite est décroissante : $u_{n+1} = \dfrac{1-u_n}{2}\, u_n \leqslant \dfrac{1}{2}u_n$), et $u_{11} \approx 7{,}63 \times 10^{-5} \leqslant 10^{-4}$.
La commande `algo(4)` renvoie $\boxed{11}$.