Calculatrice autorisée en mode examen

Le sujet est composé de 3 exercices indépendants. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

6 points

Le coyote est un animal sauvage proche du loup qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'État d'Oklahoma, aux États-Unis, $70\,\%$ des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- si le coyote est malade, le test est positif dans $97\,\%$ des cas ;
- si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans $95\,\%$ des cas.

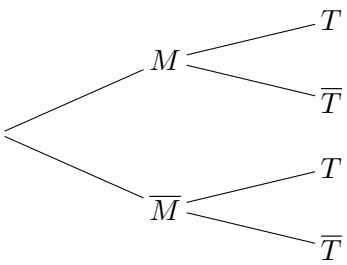
Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2) Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.

3) Démontrer que la probabilité de T est égale à $0{,}694$.

4) On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.
Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.

5) **a.** Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.

b. Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, puis interpréter.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de $0{,}694$.

1) Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, associe le nombre de coyotes de cet échantillon ayant un test positif.

- **a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.
- **b.** Calculer la probabilité que, dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.
- **c.** Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

2) Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif.
Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à $0{,}99$?

Exercice 2

6 points

Partie A : deux fonctions

Soit f et g les fonctions définies pour tout réel x positif ou nul par :

$$f(x) = 0{,}05\left(-x^2 + 13{,}4x\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = (-0{,}16x + 2{,}3)\,\mathrm{e}^{0{,}2x} - 2{,}3.$$

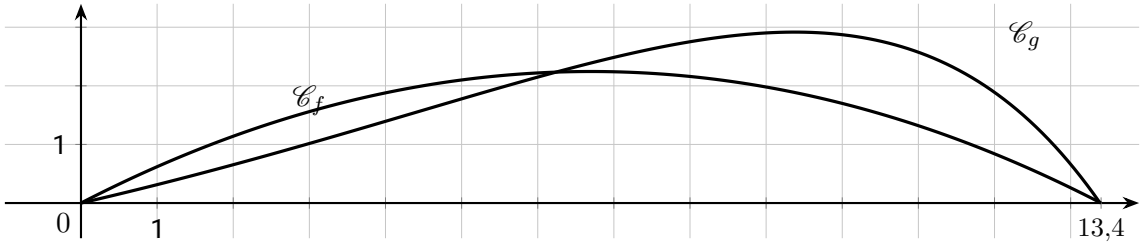
Elles sont dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$; on désigne par f' et g' leurs dérivées.

1)
- **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
- **b.** Établir le tableau de variations complet de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
- **c.** Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$?

2)
- **a.** Quelle est la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
- **b.** Prouver que $g'(x) = (-0{,}032x + 0{,}3)\,\mathrm{e}^{0{,}2x}$ pour tout réel $x \geqslant 0$.
- **c.** En déduire le sens de variation de g sur $[0\,;\,+\infty[$ et son tableau de variations, puis donner le maximum de g arrondi au centième.

Partie B : trajectoires d'une balle de golf

Pour frapper la balle, un joueur de golf utilise un instrument appelé « club » de golf.
On souhaite exploiter les fonctions f et g étudiées dans la partie A pour modéliser de deux façons différentes la trajectoire d'une balle de golf. On suppose que le terrain est parfaitement plat.
On admettra ici que $13{,}4$ est la valeur non nulle qui annule la fonction f et une approximation de la valeur non nulle qui annule la fonction g.
On donne ci-dessous les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et g sur l'intervalle $[0\,;\,13{,}4]$.

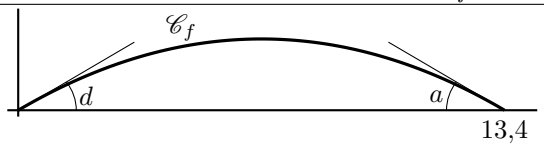
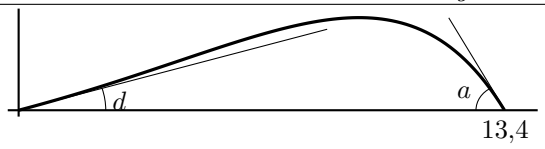


Pour x représentant la distance horizontale parcourue par la balle, en dizaines de yards, après la frappe (avec $0 < x < 13{,}4$), $f(x)$ (ou $g(x)$ selon le modèle) représente la hauteur correspondante de la balle par rapport au sol, en dizaines de yards (1 yard correspond à environ $0{,}914$ mètre).

On appelle « angle de décollage » de la balle l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathscr{C}_f$ ou $\mathscr{C}_g$ selon le modèle) en son point d'abscisse 0. Une mesure de l'angle de décollage de la balle est un nombre réel d tel que $\tan(d)$ est égal au coefficient directeur de cette tangente.

De même, on appelle « angle d'atterrissage » de la balle l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathscr{C}_f$ ou $\mathscr{C}_g$ selon le modèle) en son point d'abscisse $13{,}4$. Une mesure de l'angle d'atterrissage de la balle est un nombre réel a tel que $\tan(a)$ est égal à l'opposé du coefficient directeur de cette tangente.

Tous les angles sont mesurés en degrés.

Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe $\mathscr{C}_f$.	Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe $\mathscr{C}_g$.
	

1) *Première modélisation* : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $f(x)$ la hauteur correspondante de la balle.
Selon ce modèle :

- **a.** Quelle est la hauteur maximale, en yards, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?
- **b.** Vérifier que $f'(0) = 0{,}67$.
- **c.** Donner une mesure en degrés de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous.)
- **d.** Quelle propriété graphique de la courbe $\mathscr{C}_f$ permet de justifier que les angles de décollage et d'atterrissage de la balle sont égaux ?

2) *Seconde modélisation* : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $g(x)$ la hauteur correspondante de la balle.
Selon ce modèle :

- **a.** Quelle est la hauteur maximale, en yards, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?
- **b.** On précise que $g'(0) = 0{,}3$ et $g'(13{,}4) \approx -1{,}88$.
  - **i.** Donner une mesure en degrés de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous.)
  - **ii.** Justifier que 62 est une valeur approchée, arrondie à l'unité près, d'une mesure en degrés de l'angle d'atterrissage de la balle.

Tableau : extrait d'une feuille de calcul donnant une mesure en degrés d'un angle quand on connaît sa tangente.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	$\tan(\theta)$	0,665	0,666	0,667	0,668	0,669	0,67	0,671	0,672	0,673	0,674	0,675	0,676
2	θ en degrés	33,62	33,66	33,70	33,74	33,78	33,82	33,86	33,90	33,94	33,98	34,02	34,06
3													
4	$\tan(\theta)$	0,295	0,296	0,297	0,298	0,299	0,3	0,301	0,302	0,303	0,304	0,305	0,306
5	θ en degrés	16,44	16,49	16,54	16,59	16,65	16,70	16,75	16,80	16,86	16,91	16,96	17,01

Partie C : interrogation des modèles

À partir d'un grand nombre d'observations des performances de joueurs professionnels, on a obtenu les résultats moyens suivants :

Angle de décollage en degrés	Hauteur maximale en yards	Angle d'atterrissage en degrés	Distance horizontale en yards au point de chute
24	32	52	134

Quel modèle, parmi les deux étudiés précédemment, semble le plus adapté pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel ? La réponse sera justifiée.

Exercice 3

8 points

Soit k un nombre réel.
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = k\,u_n\,(1 - u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes. On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k.

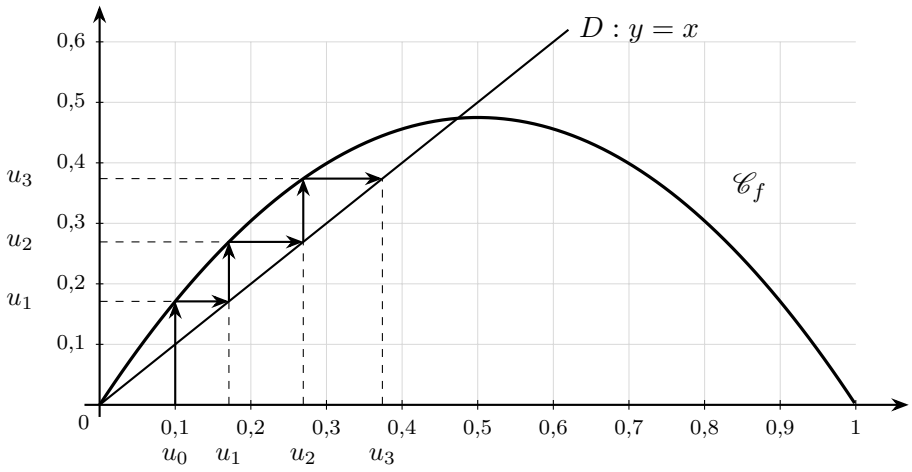
Partie 1

Dans cette partie, $k = 1{,}9$ et $u_0 = 0{,}1$. On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}9\,u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = 0{,}1$.

1) On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = 1{,}9x(1 - x)$.

- **a.** Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
- **b.** En déduire que si $x \in [0\,;\,1]$ alors $f(x) \in [0\,;\,1]$.

2) Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3) **a.** En utilisant les résultats de la question 1), démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel l.

c. En admettant que l vérifie $l = 1{,}9\,l\,(1-l)$, déterminer la valeur de l.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$. On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1-u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1) Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

2) On considère la fonction Python `algo(p)` où `p` désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p):
    u = 1/4
    n = 0
    while u > 10**(-p):
        u = 1/2*u*(1 - u)
        n = n+1
    return(n)
```

a. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul p, la boucle `while` ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo(p)` de renvoyer une valeur.

b. Donner, en justifiant, la valeur renvoyée lorsque l'on saisit la commande `algo(4)` dans la console.