Exercice 1

8 points

1) **a.** Un tirage simultané de deux lettres parmi huit est une combinaison de 2 éléments parmi 8. Le nombre de tirages possibles est :

$$\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = \boxed{28}.$$

b. Les tirages sont équiprobables. Un tirage gagnant est formé d'une voyelle choisie parmi 2 et d'une consonne choisie parmi 6 : il y en a $\binom{2}{1} \times \binom{6}{1} = 2 \times 6 = 12$. Donc

$$P(\text{« gagner »}) = \frac{12}{28} = \boxed{\frac{3}{7}}.$$

2) **a.** Si le joueur gagne (probabilité $\frac{3}{7}$), son gain algébrique est $10 - k$; sinon (probabilité $1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$), il est de $-k$. La loi de G est :

g_i	$-k$	$10-k$
$P(G = g_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

b. Le jeu est favorable au joueur lorsque $E(G) > 0$. Or

$$E(G) = -k \times \frac{4}{7} + (10-k) \times \frac{3}{7} = \frac{-4k + 30 - 3k}{7} = \frac{30}{7} - k.$$

$$E(G) > 0 \iff k < \frac{30}{7} \approx 4{,}29.$$

Comme k est un entier naturel non nul, la somme payée au départ doit être au maximum de $\boxed{4 \text{ euros}}$ (alors $E(G) = \frac{2}{7} > 0$, tandis que pour $k = 5$, $E(G) = -\frac{5}{7} < 0$).

3) **a.** Chaque partie est une épreuve de Bernoulli dont le succès « le joueur gagne » a pour probabilité $p = \frac{3}{7}$. Les lettres étant remises dans le sac après chaque partie, les dix parties sont identiques et indépendantes. X compte le nombre de succès : X suit la loi binomiale $\boxed{\mathcal{B}\left(10\,;\,\frac{3}{7}\right)}$.

b. $P(X = 4) = \binom{10}{4}\left(\frac{3}{7}\right)^4\left(\frac{4}{7}\right)^6 = 210 \times \left(\frac{3}{7}\right)^4\left(\frac{4}{7}\right)^6 \approx \boxed{0{,}247}$.

c. À la calculatrice, $P(X \leqslant 4) \approx 0{,}5601$, donc

$$P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 4) \approx \boxed{0{,}440}.$$

La probabilité qu'au moins la moitié des dix joueurs gagnent est d'environ $0{,}44$ (un peu moins d'une chance sur deux).

d. À la calculatrice (fonction de répartition de la loi binomiale) :

$$P(X \leqslant 5) \approx 0{,}7821 < 0{,}9 \qquad \text{et} \qquad P(X \leqslant 6) \approx 0{,}9208 \geqslant 0{,}9.$$

Comme $n \mapsto P(X \leqslant n)$ est croissante, le plus petit entier cherché est $\boxed{n = 6}$.

4) Pour m parties identiques et indépendantes, le nombre Y de joueurs gagnants suit la loi $\mathcal{B}(m\,;\,\frac{3}{7})$, donc la probabilité qu'aucun joueur ne gagne est $P(Y=0)=\left(\frac{4}{7}\right)^m$.

$$\left(\frac{4}{7}\right)^m < 0{,}01 \iff m\ln\left(\frac{4}{7}\right) < \ln(0{,}01) \quad \text{(la fonction } \ln \text{ est strictement croissante)}$$
$$\iff m > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{4}{7}\right)} \quad \text{(on divise par } \ln\left(\tfrac{4}{7}\right) < 0\text{)}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{4}{7}\right)} \approx 8{,}23$. Il faut donc au minimum $\boxed{9 \text{ joueurs}}$ (contrôle : $\left(\frac{4}{7}\right)^8 \approx 0{,}0114$ et $\left(\frac{4}{7}\right)^9 \approx 0{,}0065$).

Exercice 2

9 points

1) $u_1 = 0{,}75 \times 0{,}6 \times (1 - 0{,}15 \times 0{,}6) = 0{,}45 \times 0{,}91 = 0{,}4095$;
$u_2 = 0{,}75 \times 0{,}4095 \times (1 - 0{,}15 \times 0{,}4095) \approx 0{,}2883$.
Selon ce modèle, il y a environ $\boxed{410 \text{ individus}}$ au début de 2021 et environ $\boxed{288 \text{ individus}}$ au début de 2022.

2) Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $f(x) = 0{,}75x - 0{,}1125x^2$, donc $f'(x) = 0{,}75 - 0{,}225x$.
Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$: $0{,}225x \leqslant 0{,}225$, donc $f'(x) \geqslant 0{,}75 - 0{,}225 = 0{,}525 > 0$.
f' est strictement positive sur $[0\,;\,1]$: $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0\,;\,1]}$.
$f(0) = 0$ et $f(1) = 0{,}75 \times 0{,}85 = 0{,}6375$.

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
f	0	↗	$0{,}6375$

3) Pour $x \in [0\,;\,1]$:

$$f(x) = x \iff 0{,}75x - 0{,}1125x^2 = x$$
$$\iff -0{,}1125x^2 - 0{,}25x = 0$$
$$\iff -x\,(0{,}1125x + 0{,}25) = 0$$
$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{0{,}25}{0{,}1125} = -\frac{20}{9}.$$

Or $-\dfrac{20}{9} \notin [0\,;\,1]$. L'équation $f(x) = x$ a pour unique solution $\boxed{x = 0}$ dans $[0\,;\,1]$.

4) **a.** Pour tout entier naturel n, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ ».
Initialisation. $u_0 = 0{,}6$ et $u_1 = 0{,}4095$, donc $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$: $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1 \\ \Longrightarrow\ & f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1) && (f \text{ est croissante sur } [0\,;\,1]) \\ \Longleftrightarrow\ & 0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}6375 \\ \Longrightarrow\ & 0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 && (\text{car } 0{,}6375 \leqslant 1) \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.
Conclusion. Par récurrence, pour tout entier naturel n, $\boxed{0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1}$.

b. D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante ($u_{n+1} \leqslant u_n$) et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente}}$.

c. Notons ℓ sa limite. Pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, donc $\ell \in [0\,;\,1]$. La fonction f est continue sur $[0\,;\,1]$ (polynôme) et $u_{n+1} = f(u_n)$: en passant à la limite, $\ell = f(\ell)$. D'après la question 3, la seule solution de cette équation dans $[0\,;\,1]$ est 0, donc $\boxed{\ell = 0}$.

5) a. La suite (u_n) converge vers 0 ; le seuil de 20 individus correspond à $u_n \leqslant 0{,}02$. Comme $0{,}02 > 0$, par définition de la limite, l'intervalle $]-1\,;\,0{,}02[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : il existe un rang N tel que $u_N < 0{,}02$. La population passera donc sous les 20 individus : selon ce modèle, $\boxed{\text{le biologiste a raison}}$.

b. La fonction calcule les termes successifs tant que $u > 0{,}02$ et compte les itérations. En calculant les termes :

n	0	1	2	$\cdots$	9	10	11
u_n (arrondi à 10^{-4})	0,6	0,4095	0,2883	$\cdots$	0,0333	0,0249	0,0186

$u_{10} > 0{,}02$ et $u_{11} \leqslant 0{,}02$: l'appel `menace()` renvoie $\boxed{11}$.
Interprétation : $2020 + 11 = 2031$. Selon ce modèle, c'est au début de l'année **2031** que la population comptera pour la première fois au plus 20 individus : l'espèce sera alors menacée d'extinction.

Exercice 3

10 points

Partie 1 : Lecture graphique

1) Le point $A(1\,;\,20)$ appartient à $\mathscr{C}_g$, donc $\boxed{g(1) = 20}$.
$g'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente (AM) :

$$g'(1) = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{30 - 20}{3 - 1} = \boxed{5}.$$

2) Pour tout $x \in]0\,;\,4]$, $g'(x) = a + \dfrac{b}{x}$. Comme $\ln 1 = 0$:

$$\begin{cases} g(1) = 20 \\ g'(1) = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a + 50 = 20 \\ a + b = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -30 \\ b = 35 \end{cases}$$

Donc $\boxed{a = -30 \text{ et } b = 35}$: $g(x) = -30x + 50 + 35\ln x$.

Partie 2 : Étude d'une fonction auxiliaire

1) **a.** Pour tout $x \in [1\,;\,4]$: $f'(x) = -30 + 35 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{-30x + 35}{x} = \boxed{\dfrac{35 - 30x}{x}}$.

b. Sur $[1\,;\,4]$, $x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $35 - 30x$, qui s'annule en $x = \dfrac{35}{30} = \dfrac{7}{6}$ et est positif avant.

x	1		$\frac{7}{6}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

c. f est croissante sur $\left[1\,;\,\frac{7}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{7}{6}\,;\,4\right]$, avec $f(1) = 20$, $f\left(\frac{7}{6}\right) = 15 + 35\ln\left(\frac{7}{6}\right) \approx 20{,}40$ et $f(4) = -70 + 35\ln 4 \approx -21{,}48$.

x	1		$\frac{7}{6}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	20	↗	$15 + 35\ln\frac{7}{6}$	↘	$-70 + 35\ln 4$

2) *Sur* $\left[1\,;\,\frac{7}{6}\right]$: f est croissante, donc $f(x) \geqslant f(1) = 20 > 0$; l'équation $f(x) = 0$ n'y a pas de solution.
Sur $\left[\frac{7}{6}\,;\,4\right]$: f est continue et strictement décroissante, $f\left(\frac{7}{6}\right) \approx 20{,}40 > 0$ et $f(4) \approx -21{,}48 < 0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.
Ainsi, $\boxed{f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } [1\,;\,4]}$. À la calculatrice : $f(2{,}914) \approx 0{,}013 > 0$ et $f(2{,}915) \approx -0{,}005 < 0$, donc $2{,}914 < \alpha < 2{,}915$ et $\boxed{\alpha \approx 2{,}915}$ à 10^{-3} près.

3) D'après les variations de f et la question 2 :

x	1		α		4
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Partie 3 : Optimisation

1) $2\,500$ litres correspondent à $x = 2{,}5$ (milliers de litres).

$$B(2{,}5) = -15 \times 2{,}5^2 + 15 \times 2{,}5 + 35 \times 2{,}5 \times \ln 2{,}5 = -56{,}25 + 87{,}5\ln 2{,}5 \approx 23{,}925\,44.$$

Le bénéfice est d'environ $\boxed{23\,925 \text{ euros}}$.

2) B est dérivable sur $[1\,;\,4]$. La dérivée de $x \mapsto 35x\ln x$ est $x \mapsto 35\ln x + 35x \times \dfrac{1}{x} = 35\ln x + 35$. Donc :

$$B'(x) = -30x + 15 + 35\ln x + 35 = -30x + 50 + 35\ln x = \boxed{f(x)}.$$

3) **a.** $B'(x) = f(x)$: le signe de B' est donné par la question 3 de la partie 2. Avec $B(1) = 0$ et $B(4) = -180 + 140\ln 4 \approx 14{,}08$:

x	1		α		4
$B'(x) = f(x)$		$+$	0	$-$	
B	0	↗	$B(\alpha)$	↘	$-180 + 140\ln 4$

B est $\boxed{\text{croissante sur } [1\,;\,\alpha] \text{ et décroissante sur } [\alpha\,;\,4]}$.

b. Le bénéfice est maximal pour $x = \alpha \approx 2{,}915$ milliers de litres. L'entreprise doit vendre environ $\boxed{2\,915 \text{ litres}}$ de jus de fruits (le bénéfice maximal vaut alors $B(\alpha) \approx 25{,}420$ milliers d'euros, soit environ $25\,420$ euros).

Exercice 4

10 points

Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}\right)$ (orthonormé car $AB = AD = AI = 1$ et les arêtes du pavé sont deux à deux perpendiculaires) : $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,1\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $I(0\,;\,0\,;\,1)$ et, K étant le milieu de $[DC]$, $K\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,0\right)$.

1) $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$, donc

$$\overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\times(-1) + 1\times(-1) + (-1)\times\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 0.$$

Les droites (IK) et (AM) sont donc orthogonales.
Sont-elles sécantes ? Un point de (IK) s'écrit $(\frac{t}{2}\,;\,t\,;\,1-t)$ avec $t \in \mathbb{R}$; un point de (AM) s'écrit $(-s\,;\,-s\,;\,-\frac{3}{2}s)$ avec $s \in \mathbb{R}$. Un point commun vérifierait

$$\begin{cases} \frac{t}{2} = -s \\ t = -s \\ 1 - t = -\frac{3}{2}s \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $\frac{t}{2} = t$, soit $t = 0$ puis $s = 0$; la troisième devient alors $1 = 0$: impossible. Les droites ne sont pas sécantes (elles ne sont pas coplanaires).
Conclusion : $\boxed{(IK) \text{ et } (AM) \text{ sont orthogonales mais pas perpendiculaires}}$.

2) $\boxed{\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}}$ et $\boxed{\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}}$.

3) **a.** $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AK} = 6\times\frac{1}{2}+(-3)\times1+2\times0 = 3-3 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AL} = 6\times0+(-3)\times1+2\times\frac{3}{2} = -3+3 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ ne sont pas colinéaires (si $\overrightarrow{AL} = \lambda\overrightarrow{AK}$, la première coordonnée donnerait $\lambda = 0$, puis la deuxième $1 = 0$) : ils dirigent le plan (AKL). $\vec{n}$, orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, $\boxed{\text{est un vecteur normal au plan } (AKL)}$.

b. Le plan (AKL) a une équation de la forme $6x-3y+2z+d = 0$. Comme $A(0\,;\,0\,;\,0)$ appartient au plan, $d = 0$:

$$(AKL) : \boxed{6x - 3y + 2z = 0}.$$

c. Δ est perpendiculaire au plan (AKL) : $\vec{n}$ en est un vecteur directeur. Elle passe par $D(0\,;\,1\,;\,0)$:

$$\Delta : \boxed{\begin{cases} x = 6t \\ y = 1 - 3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}}$$

d. Le projeté orthogonal N de D sur (AKL) est le point d'intersection de Δ et de (AKL). Le point de Δ de paramètre t appartient au plan si et seulement si :

$$6\times6t - 3(1-3t) + 2\times2t = 0 \iff 36t - 3 + 9t + 4t = 0 \iff 49t = 3 \iff t = \frac{3}{49}.$$

On obtient $x = \frac{18}{49}$, $y = 1 - \frac{9}{49} = \frac{40}{49}$ et $z = \frac{6}{49}$: le projeté orthogonal de D sur (AKL) est bien $\boxed{N\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{40}{49}\,;\,\frac{6}{49}\right)}$.

4) **a.** Le triangle ADK est rectangle en D (face $ABCD$ du pavé), avec $AD = 1$ et $DK = \frac{1}{2}$: son aire est $\frac{1\times\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.
La hauteur relative à cette base est DL, car (DL), parallèle à (AE), est perpendiculaire au plan (ABC) ; $DL = \frac{3}{2}AI = \frac{3}{2}$. Donc

$$V = \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{2} = \boxed{\frac{1}{8}} \text{ unité de volume.}$$

b. La distance de D au plan (AKL) est DN, avec $\overrightarrow{DN} = \frac{3}{49}\vec{n}$:

$$DN = \frac{3}{49}\times\|\vec{n}\| = \frac{3}{49}\times\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2} = \frac{3}{49}\times\sqrt{49} = \boxed{\frac{3}{7}}.$$

c. Avec le triangle AKL comme base, la hauteur associée est DN :

$$V = \frac{1}{3}\times\mathcal{A}_{AKL}\times DN \iff \frac{1}{8} = \frac{1}{3}\times\mathcal{A}_{AKL}\times\frac{3}{7} \iff \mathcal{A}_{AKL} = \frac{7}{8}.$$

L'aire du triangle AKL est $\boxed{\frac{7}{8}}$ unité d'aire.

Exercice 5

3 points

1) Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$, donc $\ln(u_{n+1})$ et $\ln(u_n)$ sont définis et :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln\left(\sqrt{\mathrm{e} \times u_n}\right) - 1 = \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e} \times u_n) - 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln \mathrm{e} + \ln(u_n)\right) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(u_n) - 1\right) = \frac{1}{2}\, v_n. \end{aligned}$$

De plus $v_0 = \ln\left(\mathrm{e}^2\right) - 1 = 2 - 1 = 1$.

La suite (v_n) est $\boxed{\text{géométrique de raison } \frac{1}{2} \text{ et de premier terme } v_0 = 1}$.

2) Pour tout entier naturel n, $\boxed{v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

Comme $v_n = \ln(u_n) - 1$, on a $\ln(u_n) = v_n + 1$, donc

$$\boxed{u_n = \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}}.$$

3) $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right) = 1$.

La fonction exponentielle étant continue en 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^1$, soit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}}$.