Calculatrice autorisée en mode examen

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

8 points

Un sac contient les huit lettres suivantes : A B C D E F G H (2 voyelles et 6 consonnes).
Un jeu consiste à tirer simultanément au hasard deux lettres dans ce sac.
On gagne si le tirage est constitué d'une voyelle **et** d'une consonne.

1) Un joueur extrait simultanément deux lettres du sac.

a. Déterminer le nombre de tirages possibles.

b. Déterminer la probabilité que le joueur gagne à ce jeu.

Les questions 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.

Pour la suite de l'exercice, on admet que la probabilité que le joueur gagne est égale à $\frac{3}{7}$.

2) Pour jouer, le joueur doit payer k euros, k désignant un entier naturel non nul.
Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien.
On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est-à-dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).

a. Déterminer la loi de probabilité de G.

b. Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ?

3) Dix joueurs font chacun une partie. Les lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'il y ait exactement quatre joueurs gagnants.

c. Calculer $P(X \geqslant 5)$ en arrondissant à 10^{-3}. Donner une interprétation du résultat obtenu.

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}9$.

4) Soit m un entier naturel non nul. m joueurs font chacun une partie.
Déterminer le nombre minimum de joueurs pour que la probabilité qu'aucun joueur ne gagne soit inférieure à $0{,}01$.

Exercice 2

9 points

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique. Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}6 \\ u_{n+1} = 0{,}75\,u_n\,(1 - 0{,}15\,u_n) \end{cases}$$

où, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1) Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = 0{,}75\,x\,(1 - 0{,}15\,x)$.

2) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et dresser son tableau de variations.

3) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4)

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

5) Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

b. Le biologiste a programmé en langage Python la fonction `menace()` ci-dessous :

```
def menace():
    u = 0.6
    n = 0
    while u > 0.02:
        u = 0.75*u*(1-0.15*u)
        n = n+1
    return n
```

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction `menace()`.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3

10 points

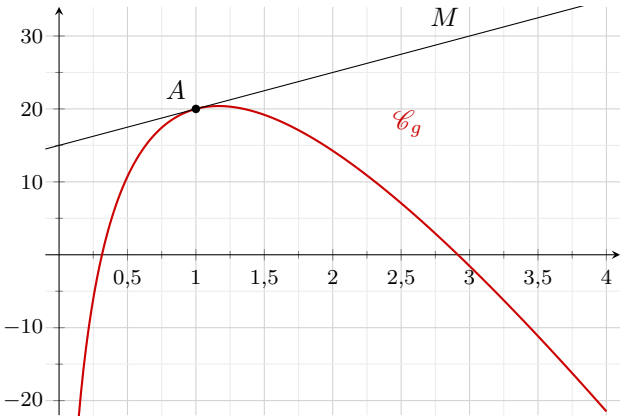
Cet exercice est composé de trois parties. Certains résultats de la deuxième partie seront utilisés dans la troisième.

Partie 1 : Lecture graphique

Soit la fonction g définie sur $]0\,;\,4]$ par :

$$g(x) = ax + 50 + b\ln x \qquad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

Sur le graphique ci-contre, on donne $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g.
Le point $A(1\,;\,20)$ appartient à la courbe.
La tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_g$ passe par le point $M(3\,;\,30)$.



1) Lire graphiquement $g(1)$ et $g'(1)$.

2) À l'aide de la question précédente, déterminer les valeurs de a et de b.

Partie 2 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,4]$ par $f(x) = -30x + 50 + 35\ln x$.

1) On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;\,4]$, montrer que $f'(x) = \dfrac{35 - 30x}{x}$.

b. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.

c. En déduire les variations de f sur ce même intervalle.

2) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\,;\,4]$, puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3) Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1\,;\,4]$.

Partie 3 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1\,;\,4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$, en milliers d'euros, par l'expression :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

1) D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend $2\,500$ litres de jus de fruits. On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.

2) Pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$, où B' désigne la fonction dérivée de B.

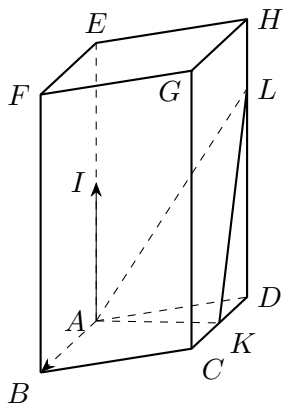
3) **a.** À l'aide des résultats de la **partie 2**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.

b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.

Exercice 4

10 points

On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = AD = 1$ et $AE = 2$, représenté ci-contre.
Le point I est le milieu du segment $[AE]$.
Le point K est le milieu du segment $[DC]$.
Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$.
N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}\right)$.
On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0\,;\,1\,;\,\frac{3}{2}\right)$.
On donne le point M de coordonnées $\left(-1\,;\,-1\,;\,-\frac{3}{2}\right)$.



1) Les droites (IK) et (AM) sont-elles orthogonales ou perpendiculaires ?

2) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.

3)
- **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(6\,;\,-3\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).
- **b.** En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).
- **c.** Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
- **d.** En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{40}{49}\,;\,\frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

> On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
> $V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}$.

4)
- **a.** Calculer le volume du tétraèdre $ADKL$ en utilisant le triangle ADK comme base.
- **b.** Calculer la distance du point D au plan (AKL).
- **c.** Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

Exercice 5

3 points

(u_n) est la suite définie par $u_0 = \mathrm{e}^2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{\mathrm{e} \times u_n}$.
On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n) - 1$.

1) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

2) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

3) Étudier la limite de la suite (u_n).