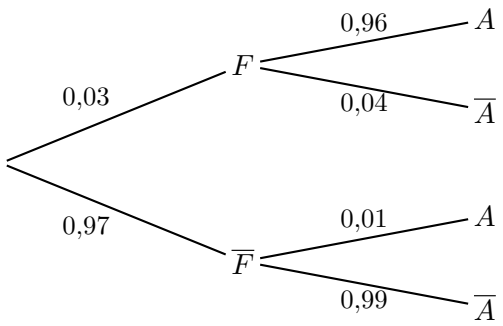
Exercice 1

6 points

Partie A

1) Arbre pondéré (complété avec les résultats des questions 2 et 3) :



L'énoncé donne $P(F) = 0{,}03$, $P_F(A) = 0{,}96$ et $P(A) = 0{,}0385$; on en déduit $P\left(\overline{F}\right) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$ et $P_F\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$. La probabilité $P_{\overline{F}}(A) = 0{,}01$ est établie à la question 3, d'où $P_{\overline{F}}\left(\overline{A}\right) = 0{,}99$.

2) **a.** $P(F \cap A) = P(F) \times P_F(A) = 0{,}03 \times 0{,}96 = \boxed{0{,}0288}$.

b. On cherche $P_A(F)$:

$$P_A(F) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}0288}{0{,}0385} \approx \boxed{0{,}7481}.$$

Lorsque l'alarme se déclenche, il y a environ $75\,\%$ de chances qu'un feu se soit réellement déclaré.

3) Les évènements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(F \cap A) + P\left(\overline{F} \cap A\right) \quad \text{donc} \quad P\left(\overline{F} \cap A\right) = 0{,}0385 - 0{,}0288 = 0{,}0097.$$

Ainsi :

$$P_{\overline{F}}(A) = \frac{P\left(\overline{F} \cap A\right)}{P\left(\overline{F}\right)} = \frac{0{,}0097}{0{,}97} = \boxed{0{,}01}.$$

4) L'alarme est défaillante lorsque l'évènement $\left(F \cap \overline{A}\right) \cup \left(\overline{F} \cap A\right)$ est réalisé ; ces deux évènements sont incompatibles, donc la probabilité cherchée vaut :

$$\begin{aligned} P\left(F \cap \overline{A}\right) + P\left(\overline{F} \cap A\right) &= 0{,}03 \times 0{,}04 + 0{,}0097 \\ &= 0{,}0012 + 0{,}0097 \\ &= \boxed{0{,}0109}. \end{aligned}$$

Comme $0{,}0109 > 0{,}01$, **non** : la probabilité que l'alarme soit défaillante n'est pas inférieure à $0{,}01$.

Partie B

1) On répète 8 fois, de façon identique et indépendante (tirages assimilés à des tirages avec remise), une épreuve de Bernoulli dont le succès est « l'alarme est défaillante », de probabilité

$p = 0{,}0109$.
X compte le nombre de succès : X suit la **loi binomiale** de paramètres $\boxed{n = 8 \text{ et } p = 0{,}0109}$.
Pour tout entier k compris entre 0 et 8 : $P(X = k) = \binom{8}{k} \times 0{,}0109^k \times 0{,}9891^{8-k}$.

2) $P(X = 1) = \binom{8}{1} \times 0{,}0109 \times 0{,}9891^7 = 8 \times 0{,}0109 \times 0{,}9891^7 \approx \boxed{0{,}0808}$.

3) On passe par l'évènement contraire :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}9891^8 \approx \boxed{0{,}0839}.$$

Partie C

Notons Y_n le nombre d'alarmes défaillantes parmi les n choisies. Pour les mêmes raisons qu'à la partie B, Y_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,0{,}0109)$, donc

$$P(Y_n \geqslant 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - 0{,}9891^n.$$

On résout, pour n entier naturel non nul :

$$\begin{aligned} 1 - 0{,}9891^n > 0{,}1 &\iff 0{,}9891^n < 0{,}9 \\ &\iff n\ln(0{,}9891) < \ln(0{,}9) \quad (\ln \text{ strictement croissante sur }]0\,;\,+\infty[) \\ &\iff n > \frac{\ln(0{,}9)}{\ln(0{,}9891)} \quad (\text{division par } \ln(0{,}9891) < 0). \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}9)}{\ln(0{,}9891)} \approx 9{,}61$. Le plus petit entier qui convient est donc $\boxed{n = 10}$.

Vérification : pour $n = 9$, $1 - 0{,}9891^9 \approx 0{,}0939 \leqslant 0{,}1$; pour $n = 10$, $1 - 0{,}9891^{10} \approx 0{,}1038 > 0{,}1$.

Exercice 2

5 points

1) On a $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$, donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$.
Ainsi $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{2x}\right) = 1$ et, par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(1 - \mathrm{e}^{2x}\right) = -\infty$.
Par somme :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}.$$

2) Pour tout réel x de $]-\infty\,;\,1]$, $f(x) = x - x\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x}$. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ a pour dérivée $x \mapsto 2\mathrm{e}^{2x}$, et la dérivée de $x \mapsto x\mathrm{e}^{2x}$ (produit) est $x \mapsto 1 \times \mathrm{e}^{2x} + x \times 2\mathrm{e}^{2x}$. Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \left(\mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x}\right) + 2\mathrm{e}^{2x} \\ &= 1 + \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{2x} \\ &= \boxed{1 + (1 - 2x)\mathrm{e}^{2x}}. \end{aligned}$$

3) **a.** Pour tout réel x, $u(x) = 1 + \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{2x} = 1 + \mathrm{e}^{2x} - X\mathrm{e}^X$ en posant $X = 2x$.
Quand $x \to -\infty$, $X \to -\infty$; or $\lim\limits_{X \to -\infty} X\mathrm{e}^X = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$.

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} u(x) = 1}.$$

b. u est dérivable sur $]-\infty\,;\,1]$ et, pour tout x (dérivée d'un produit) :

$$u'(x) = -2\mathrm{e}^{2x} + (1-2x)\times 2\mathrm{e}^{2x} = (-2+2-4x)\mathrm{e}^{2x} = \boxed{-4x\mathrm{e}^{2x}}.$$

Comme $\mathrm{e}^{2x} > 0$, $u'(x)$ a le signe de $-4x$: $u'(x) > 0$ si $x < 0$, $u'(0) = 0$ et $u'(x) < 0$ si $0 < x \leqslant 1$.
Donc u est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et strictement décroissante sur $[0\,;\,1]$.
$u(0) = 1 + 1\times \mathrm{e}^0 = 2$ et $u(1) = 1 + (1-2)\mathrm{e}^2 = 1 - \mathrm{e}^2 \approx -6{,}39$.

x	$-\infty$		0		1
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
u	1	↗	2	↘	$1-\mathrm{e}^2$

c. *Sur* $]-\infty\,;\,0]$: u est strictement croissante et tend vers 1 en $-\infty$, donc pour tout $x \leqslant 0$, $u(x) > 1 > 0$: l'équation $u(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.
Sur $[0\,;\,1]$: u est continue (car dérivable) et strictement décroissante ; $u(0) = 2 > 0$ et $u(1) = 1 - \mathrm{e}^2 < 0$, donc 0 est compris entre $u(1)$ et $u(0)$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;\,1]$.
Finalement, l'équation $u(x) = 0$ possède une **unique solution** α dans $]-\infty\,;\,1]$.
À la calculatrice : $u(0{,}63) \approx 0{,}083 > 0$ et $u(0{,}64) \approx -0{,}007 < 0$, donc $0{,}63 < \alpha < 0{,}64$ et $\boxed{\alpha \approx 0{,}64}$ à 10^{-2} près.

d. D'après les variations de u :

$$u(x) > 0 \text{ sur }]-\infty\,;\,\alpha[, \qquad u(\alpha) = 0, \qquad u(x) < 0 \text{ sur }]\alpha\,;\,1].$$

4) Pour tout x de $]-\infty\,;\,1]$, $f'(x) = u(x)$. Donc f est **strictement croissante sur** $]-\infty\,;\,\alpha]$ et **strictement décroissante sur** $[\alpha\,;\,1]$, avec $f(1) = 1\times\left(1-\mathrm{e}^2\right) + \mathrm{e}^2 = 1$.

x	$-\infty$		α		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	1

5) $f' = u$ est dérivable, donc $f''(x) = u'(x) = -4x\mathrm{e}^{2x}$ pour tout x de $]-\infty\,;\,1]$.
D'après la question 3.b, $f''(x) > 0$ sur $]-\infty\,;\,0[$ et $f''(x) < 0$ sur $]0\,;\,1]$: f'' s'annule **en changeant de signe** en 0 et uniquement en 0.
Donc f est convexe sur $]-\infty\,;\,0]$, concave sur $[0\,;\,1]$, et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion, d'abscisse 0 : comme $f(0) = 0\times(1-1) + 1 = 1$, c'est le point $\boxed{(0\,;\,1)}$.

Exercice 3

4 points

Les justifications ci-dessous ne sont pas demandées dans l'épreuve; elles sont données pour comprendre.

1) Réponse **d**. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 0{,}5u_n + 1 - 2 = 0{,}5u_n - 1 = 0{,}5\,(u_n - 2) = 0{,}5v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}5$ (et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -2$).

2) Réponse **b**. Comme $0 < \dfrac{1}{4} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$, donc le minorant tend vers 1.
Pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$, qui tend vers 1 ; donc le majorant $2 - \dfrac{n}{n+1}$ tend aussi vers 1.
D'après le théorème des gendarmes, (a_n) converge vers 1.

3) Réponse **c**. Pour tout n, $v_n \times v_{n+1} < 0$: deux termes consécutifs sont non nuls et de signes contraires. Les termes de rang pair ont donc le signe de $v_0 = k$ et ceux de rang impair le signe de $-k$. Comme 10 est pair, v_{10} est du signe de k.
Les réponses a et b ne conviennent pas puisque le signe de k n'est pas connu.

4) Réponse **c**. On fait tourner le programme :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u	5	7	13	31	85	247	733	2 191	6 565	19 687	59 053

Tant que $u \leqslant 50\,000$, on calcule le terme suivant. On s'arrête dès que $u = 59\,053 > 50\,000$, avec $n = 10$: le programme renvoie 10. À la fin, u contient $59\,053$ (et non $50\,000$).

Exercice 4

5 points

Dans le repère $\left(D\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, l'unité vaut 1 sur chaque axe : $C(6\,;\,0\,;\,0)$, $A(0\,;\,4\,;\,0)$ et $H(0\,;\,0\,;\,4)$.

1) $\boxed{B(6\,;\,4\,;\,0)}$, $\boxed{E(0\,;\,4\,;\,4)}$, $\boxed{F(6\,;\,4\,;\,4)}$ et $\boxed{G(6\,;\,0\,;\,4)}$.

2) **a.** $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ES}\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée de $\overrightarrow{EF}$ est nulle, pas celle de $\overrightarrow{ES}$) : ils dirigent le plan (EFS).

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF} = 0\times 6 + 1\times 0 + 1\times 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{n}\cdot\overrightarrow{ES} = 0\times 3 + 1\times(-2) + 1\times 2 = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EFS) : il est **normal** au plan (EFS).

b. Le plan (EFS) admet donc une équation de la forme $0\times x + 1\times y + 1\times z + d = 0$, soit $y + z + d = 0$.

$E(0\,;\,4\,;\,4)$ appartient au plan : $4+4+d=0$, d'où $d=-8$. Une équation cartésienne de (EFS) est $\boxed{y+z-8=0}$.

3) **a.** La droite (PQ) passe par $Q(2\,;\,3\,;\,5{,}5)$ et est dirigée par $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$:

$$(PQ)\ :\ \boxed{\begin{cases}x=2\\y=3\\z=5{,}5+t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}.}$$

b. P est le point d'intersection de la droite (PQ) et du plan (EFS). Son paramètre t vérifie :

$$3+(5{,}5+t)-8=0 \iff t=-0{,}5.$$

Donc $z=5{,}5-0{,}5=5$ et $\boxed{P(2\,;\,3\,;\,5)}$.

c. $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}0\\0\\0{,}5\end{pmatrix}$, donc $PQ=\sqrt{0^2+0^2+0{,}5^2}=\boxed{0{,}5}$. L'antenne mesure $0{,}5$ unité de longueur.

4) Un vecteur directeur de Δ est $\vec{w}\begin{pmatrix}6\\-4\\4\end{pmatrix}$; il n'est pas colinéaire à $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (sa première coordonnée n'est pas nulle). Les droites (PQ) et Δ ne sont donc pas parallèles : elles sont sécantes ou non coplanaires.
On cherche s'il existe des réels t et s tels que :

$$\begin{cases}2=-4+6s\\3=7-4s\\5{,}5+t=2+4s\end{cases}\iff\begin{cases}s=1\\s=1\\t=2+4-5{,}5\end{cases}\iff\begin{cases}s=1\\t=0{,}5\end{cases}$$

Le système a une solution : les droites (PQ) et Δ sont **sécantes**, au point M de paramètre $s=1$: $\boxed{M(2\,;\,3\,;\,6)}$.
Les points du segment $[PQ]$ ont pour cote z comprise entre 5 (en P) et $5{,}5$ (en Q), c'est-à-dire $t\in[-0{,}5\,;\,0]$. Or M a pour cote $6>5{,}5$ ($t=0{,}5$) : M n'appartient pas au segment $[PQ]$.
L'oiseau ne percute pas l'antenne : il passe à la verticale de l'antenne, $0{,}5$ unité au-dessus de son extrémité Q.