Calculatrice autorisée en mode examen

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Exercice 1

6 points

Les probabilités demandées sont à donner sous forme décimale, exacte ou arrondie à 10^{-4} lorsque c'est nécessaire.

Partie A

Un entrepôt est protégé par une alarme incendie. Lorsqu'un départ de feu survient, l'alarme se déclenche avec une probabilité égale à $0{,}96$.
Un départ de feu survient avec une probabilité de $0{,}03$, et l'alarme se déclenche, qu'il y ait un feu ou non, avec une probabilité de $0{,}0385$.
On appelle F l'évènement « un départ de feu survient » et A l'évènement « l'alarme se déclenche ».

1) Construire un arbre pondéré décrivant la situation ; on le complètera au fil de l'exercice.

2) **a.** Déterminer la probabilité de l'évènement $F \cap A$.

b. En déduire la probabilité qu'un feu se soit déclaré, sachant que l'alarme s'est déclenchée.

3) Établir que, lorsqu'aucun feu ne survient, l'alarme se déclenche malgré tout avec une probabilité de $0{,}01$.

4) L'alarme est dite défaillante dans deux cas : un feu survient sans qu'elle se déclenche, ou elle se déclenche alors qu'aucun feu ne survient.
La probabilité que l'alarme soit défaillante est-elle inférieure à $0{,}01$?

Partie B

Un fabricant produit ces alarmes en très grande série. On en choisit 8 au hasard dans sa production ; on assimile ce choix à 8 tirages successifs avec remise.
On appelle S l'évènement « l'alarme est défaillante » et on admet que $P(S) = 0{,}0109$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'alarmes défaillantes parmi les 8 alarmes choisies.

1) Identifier, en justifiant, la loi de probabilité de X et donner ses paramètres.

2) Quelle est la probabilité qu'exactement une des 8 alarmes soit défaillante ?

3) Quelle est la probabilité qu'au moins une des 8 alarmes soit défaillante ?

Partie C

On choisit maintenant n alarmes au hasard, n désignant un entier naturel non nul ; ce choix est encore assimilé à des tirages avec remise.
En détaillant la démarche, trouver la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité qu'au moins une des alarmes choisies soit défaillante dépasse strictement $0{,}1$.

Exercice 2

5 points

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,1]$ par : $f(x) = x\left(1-\mathrm{e}^{2x}\right)+\mathrm{e}^{2x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Démontrer que, pour tout réel x de $]-\infty\,;\,1]$: $f'(x) = 1+(1-2x)\mathrm{e}^{2x}$.

3) Soit u la fonction définie sur $]-\infty\,;\,1]$ par : $u(x) = 1+(1-2x)\mathrm{e}^{2x}$.

- **a.** Déterminer la limite de u en $-\infty$.
- **b.** Étudier le sens de variation de u et dresser son tableau de variation.
- **c.** Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty\,;\,1]$. Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-2} près.
- **d.** En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4) En déduire le sens de variation de f.

5) Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion.

Exercice 3

4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 1$ et $v_n = u_n - 2$. On peut affirmer que la suite (v_n) est :

a. arithmétique de raison -2 ; **b.** géométrique de raison -2 ;
c. arithmétique de raison 1 ; **d.** géométrique de raison $0{,}5$.

2) On considère une suite (a_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$1+\left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant a_n \leqslant 2-\frac{n}{n+1}.$$

On peut affirmer que la suite (a_n) :

a. converge vers 2 ; **b.** converge vers 1 ; **c.** diverge vers $+\infty$; **d.** n'a pas de limite.

3) Soit k un nombre réel non nul et (v_n) une suite définie pour tout entier naturel n.
On suppose que $v_0 = k$ et que, pour tout entier naturel n, $v_n \times v_{n+1} < 0$. On peut affirmer que v_{10} est :

a. positif ; **b.** négatif ; **c.** du signe de k ; **d.** du signe de $-k$.

4) On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.

a. Ce programme renvoie $50\,000$;
b. Ce programme renvoie 9 ;
c. Ce programme renvoie 10 ;
d. À la fin de l'exécution, la variable `u` contient la valeur $50\,000$.

```
def valeur():
    u = 5
    n = 0
    while u <= 50000:
        u = 3*u - 8
        n = n + 1
    return n
```

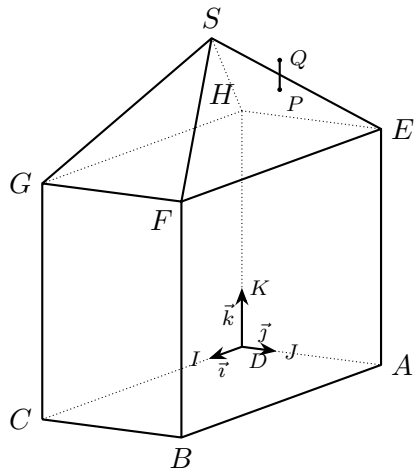
Exercice 4

5 points

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ surmonté d'une pyramide $EFGHS$.
On a $DC = 6$ et $DA = DH = 4$.
Soit les points I, J et K tels que

$$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}, \qquad \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}, \qquad \overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}.$$

On note $\vec{\imath} = \overrightarrow{DI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{DJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{DK}$.
On se place dans le repère orthonormé $\left(D\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
On admet que le point S a pour coordonnées $(3\,;\,2\,;\,6)$.



1) Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G.

2) **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$.

3) On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment $[PQ]$. On dispose des données suivantes :

- le point P appartient au plan (EFS) ;
- le point Q a pour coordonnées $(2\,;\,3\,;\,5{,}5)$;
- la droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (PQ).

b. En déduire les coordonnées du point P.

c. En déduire la longueur PQ de l'antenne.

4) Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée ci-contre.
Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ.
L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment $[PQ]$?

$$\begin{cases} x = -4 + 6s \\ y = 7 - 4s \\ z = 2 + 4s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$