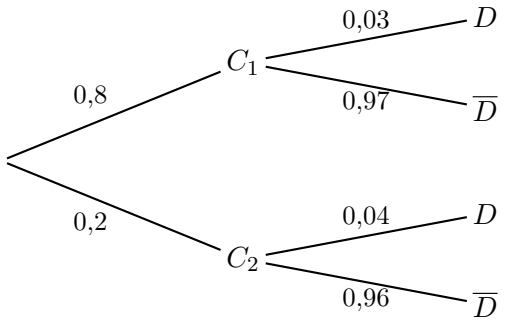
Exercice 1

6 points

Partie A

1) $P(C_1) = 0{,}8$ donc $P(C_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $P_{C_1}(D) = 0{,}03$ donc $P_{C_1}(\overline{D}) = 0{,}97$. La probabilité $P_{C_2}(D) = 0{,}04$ est obtenue à la question 3), d'où $P_{C_2}(\overline{D}) = 0{,}96$. Arbre complété :



2) **a.** $P(C_1 \cap D) = P(C_1) \times P_{C_1}(D) = 0{,}8 \times 0{,}03 = \boxed{0{,}024}$.

b. On sait que $P(D) = 0{,}032$:

$$P_D(C_1) = \frac{P(C_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}024}{0{,}032} = \boxed{0{,}75}.$$

3) C_1 et C_2 forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(C_1 \cap D) + P(C_2 \cap D) \iff P(C_2 \cap D) = 0{,}032 - 0{,}024 = 0{,}008.$$

Donc

$$P_{C_2}(D) = \frac{P(C_2 \cap D)}{P(C_2)} = \frac{0{,}008}{0{,}2} = \boxed{0{,}04}.$$

Partie B

1) On répète n fois, de façon identique et indépendante (choix assimilé à un tirage avec remise), une épreuve de Bernoulli dont le succès « la pièce est défectueuse » a pour probabilité $p = 0{,}032$. X compte le nombre de succès, donc X suit la $\boxed{\text{loi binomiale } \mathcal{B}(n\,;\,0{,}032)}$.

2) Ici X suit $\mathcal{B}(20\,;\,0{,}032)$: pour tout entier k entre 0 et 20, $P(X = k) = \binom{20}{k} \times 0{,}032^k \times 0{,}968^{20-k}$.

a. $P(X = 3) = \binom{20}{3} \times 0{,}032^3 \times 0{,}968^{17} = 1140 \times 0{,}032^3 \times 0{,}968^{17} \approx \boxed{0{,}0215}$.

b. À la calculatrice (fonction de répartition de la loi binomiale) :

$$P(2 \leqslant X \leqslant 5) = P(X \leqslant 5) - P(X \leqslant 1) \approx 0{,}999\,97 - 0{,}866\,80 \approx \boxed{0{,}1332}.$$

c. « Au moins une pièce défectueuse » est l'évènement contraire de « aucune pièce défectueuse » :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}968^{20} \approx \boxed{0{,}4782}.$$

3) Pour un carton de n pièces, $P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}968^n$. On résout, pour n entier naturel non nul :

$$\begin{aligned} & 1 - 0{,}968^n < 0{,}15 \\ \iff & 0{,}968^n > 0{,}85 \\ \iff & \ln\left(0{,}968^n\right) > \ln(0{,}85) \quad \text{(la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0\,;+\infty[) \\ \iff & n\ln(0{,}968) > \ln(0{,}85) \\ \iff & n < \frac{\ln(0{,}85)}{\ln(0{,}968)} \quad \text{(on divise par } \ln(0{,}968) < 0\text{, l'ordre change)} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}85)}{\ln(0{,}968)} \approx 4{,}997$. Vérification : $1 - 0{,}968^4 \approx 0{,}1220 < 0{,}15$ et $1 - 0{,}968^5 \approx 0{,}1501 > 0{,}15$.
La plus grande valeur de n compatible avec l'exigence du responsable qualité est $\boxed{n = 4}$.

Exercice 2

5 points

Partie A

1) Pour tout réel $x \neq 0$, $p(x) = x^3\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right) = 1$, donc par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty}$.

2) p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$.
Discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$, donc $p'(x)$ est du signe de $a = 3$: $p'(x) > 0$ pour tout réel x.
p est $\boxed{\text{strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$p'(x)$		$+$	
p	$-\infty$	↗	$+\infty$

3) p est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$.
Comme 0 est compris entre $-\infty$ et $+\infty$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $\boxed{\text{l'équation } p(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}}$.

4) À la calculatrice : $p(-0{,}2) = -0{,}128 < 0$ et $p(-0{,}1) = 0{,}469 > 0$, donc $-0{,}2 < \alpha < -0{,}1$.
Plus finement, $p(-0{,}18) \approx -0{,}003 < 0$ et $p(-0{,}17) > 0$, donc $-0{,}18 < \alpha < -0{,}17$ et $\boxed{\alpha \approx -0{,}2}$ au dixième près.

5) Comme p est strictement croissante et $p(\alpha) = 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$p(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1) **a.** *En* $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+x^2\right) = +\infty$, donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

En $+\infty$: pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \times \dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \times \dfrac{1}{\frac{1}{x^2}+1}$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = 1$, donc par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

b. $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x$, $u'(x) = \mathrm{e}^x$, $v(x) = 1+x^2 > 0$, $v'(x) = 2x$. Pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x\left(1+x^2\right) - \mathrm{e}^x \times 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{\mathrm{e}^x\left(x^2-2x+1\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = \boxed{\frac{\mathrm{e}^x(x-1)^2}{\left(1+x^2\right)^2}}.$$

c. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse a si et seulement si $f'(a) = 0$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$ et $\left(1+x^2\right)^2 > 0$:

$$f'(x) = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une seule tangente horizontale, au point de coordonnées $\left(1\,;\,\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right)$: $\boxed{x = 1}$.

2) Un point d'inflexion correspond à un changement de signe de f''. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ et $\left(1+x^2\right)^3 > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $p(x)(x-1)$. Avec le signe de p (partie A, 5)) et $\alpha < 1$:

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f'' s'annule en changeant de signe en α et en 1 : f est convexe sur $]-\infty\,;\,\alpha]$, concave sur $[\alpha\,;\,1]$ et convexe sur $[1\,;\,+\infty[$. La courbe $\mathscr{C}_f$ possède donc exactement deux points d'inflexion, d'abscisses α et 1.

Oui, la rampe assure de bonnes sensations.

Exercice 3

4 points

1) Réponse b). Pour tout entier naturel n :

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 0{,}5a_n + 1 - 2 = 0{,}5a_n - 1 = 0{,}5\,(a_n - 2) = 0{,}5\,b_n.$$

(b_n) est géométrique de raison $0{,}5$ (et de premier terme $b_0 = -1$). En revanche $a_0 = 1$, $a_1 = 1{,}5$, $a_2 = 1{,}75$: $a_1 - a_0 \neq a_2 - a_1$ et $\dfrac{a_1}{a_0} \neq \dfrac{a_2}{a_1}$, donc (a_n) n'est ni arithmétique ni géométrique ; $b_1 - b_0 = 0{,}5 \neq b_2 - b_1 = 0{,}25$, donc (b_n) n'est pas arithmétique.

2) Réponse c). $u_1 = 2 + 3 \times 1 = 5$, $v_1 = 2 + 1 = 3$, puis $u_2 = 5 + 3 \times 3 = 14$ et $v_2 = 5 + 3 = 8$.

- a) est faux : ce sont u_1 et v_1 qui valent 5 et 3 ;
- b) est faux : $u_2^2 - 3v_2^2 = 196 - 192 = 4 \neq -4$;
- c) est vrai : $\dfrac{u_2}{v_2} = \dfrac{14}{8} = 1{,}75$;
- d) est faux : $5u_1 = 25$ et $3v_1 = 9$.

3) Réponse d). La boucle `for k in range(1, 11)` est exécutée pour $k = 1, 2, \ldots, 10$, soit 10 fois. À chaque passage, la variable `c` garde l'ancienne valeur de `u`, ce qui permet de calculer $u_{n+1} = u_n + 3v_n$ puis $v_{n+1} = u_n + v_n$: on passe de $(u_n\,;\,v_n)$ à $(u_{n+1}\,;\,v_{n+1})$. Partant de $(u_0\,;\,v_0)$, après 10 passages la fonction renvoie seulement les deux dernières valeurs, u_{10} et v_{10} (ici $43\,232$ et $24\,960$).

4) Réponse d). La suite (v_n) converge, elle est donc bornée : il existe un réel M tel que, pour tout n, $v_n \leqslant M$. Alors $u_n \leqslant v_n \leqslant M$: la suite (u_n) est majorée.
Les autres réponses sont fausses : avec $u_n = -n$ et $v_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$, on a bien $u_n \leqslant v_n$ et $v_n \to 2$, mais (u_n) diverge (a) faux) et $v_n > 2$ (b) faux) ; avec $u_n = 1$ et la même suite (v_n), (u_n) converge (c) faux).

Exercice 4

5 points

1) $\overrightarrow{AB} = 4\vec{\imath}$, $\overrightarrow{AD} = 3\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{AE} = 2\vec{k}$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, donc : $\boxed{B(4\,;\,0\,;\,0)}$, $\boxed{E(0\,;\,0\,;\,2)}$, $\boxed{F(4\,;\,0\,;\,2)}$, $\boxed{G(4\,;\,3\,;\,2)}$.

2) **a.** $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est normal à (EHI), donc une équation de ce plan est de la forme $x - z + d = 0$.
$E(0\,;\,0\,;\,2) \in (EHI) : 0 - 2 + d = 0 \iff d = 2$.

$\boxed{(EHI) : x - z + 2 = 0}$ (contrôle avec $H(0\,;\,3\,;\,2) : 0 - 2 + 2 = 0$).

b. I appartient au plan (ABE), qui est le plan d'équation $y = 0$, donc $y_I = 0$.
Le triangle EIF est isocèle en I et I est dans le plan (ABE) : I est sur la médiatrice de

$[EF]$ dans ce plan, donc $x_I = \dfrac{x_E + x_F}{2} = \dfrac{0+4}{2} = 2$.
Enfin $I \in (EHI) : 2 - z_I + 2 = 0 \iff z_I = 4$.

$$\boxed{I(2\,;\,0\,;\,4)}.$$

3) $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$, donc

$$\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IF} = -4 + 0 + 4 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont orthogonaux (et non nuls) : $\boxed{\widehat{EIF} = 90°}$. Le toit forme un angle droit au faîtage.

4) **a.** Δ passe par $R(8\,;\,-4\,;\,-2)$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$:

$$\boxed{\Delta : \begin{cases} x = 8 - 2t \\ y = -4 + 3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + t \end{cases}}.$$

b. K est le point de Δ dont l'abscisse vaut 4 :

$8 - 2t = 4 \iff t = 2$, d'où $y = -4 + 6 = 2$ et $z = -2 + 2 = 0$: $\boxed{K(4\,;\,2\,;\,0)}$.

c. $B(4\,;\,0\,;\,0)$ et $C(4\,;\,3\,;\,0)$ (car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$). On a $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ avec $0 \leqslant \dfrac{2}{3} \leqslant 1$.
$\boxed{\text{Oui, } K \text{ appartient à l'arête } [BC]}$ (aux deux tiers en partant de B) : la tranchée arrive bien au chalet sur cette arête.