L'utilisation d'une calculatrice est autorisée en mode examen.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Exercice 1

6 points

Un équipementier produit des pièces destinées à l'industrie automobile. Toute sa production sort de deux chaînes de montage, la chaîne n° 1 et la chaîne n° 2. On sait que :

- la chaîne n° 1 assure $80\,\%$ de la production ;
- la probabilité qu'une pièce soit défectueuse est égale à $0{,}032$;
- parmi les pièces sorties de la chaîne n° 1, $3\,\%$ sont défectueuses.

On choisit une pièce au hasard dans la production et on considère les évènements :

- C_1 : « la pièce sort de la chaîne n° 1 » ;
- C_2 : « la pièce sort de la chaîne n° 2 » ;
- D : « la pièce est défectueuse ».

Les probabilités seront données sous forme décimale exacte ou, à défaut, arrondies à 10^{-4}.

Partie A

1) Construire un arbre pondéré décrivant la situation ; on le complétera au fil de l'exercice.

2) **a.** Déterminer la probabilité que la pièce choisie sorte de la chaîne n° 1 et soit défectueuse.

b. En déduire la probabilité qu'une pièce défectueuse sorte de la chaîne n° 1.

3) Montrer que la probabilité qu'une pièce sortie de la chaîne n° 2 soit défectueuse vaut $0{,}04$.

Partie B

Les pièces sont expédiées par cartons de n pièces. Remplir un carton revient à choisir successivement n pièces au hasard dans la production ; on assimile ce choix à un tirage avec remise. On rappelle que $P(D) = 0{,}032$.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses d'un carton.

1) Identifier, en justifiant, la loi de probabilité de X et donner ses paramètres.

2) On suppose ici que chaque carton contient 20 pièces : $n = 20$.

a. Déterminer la probabilité qu'un carton contienne exactement 3 pièces défectueuses.

b. Calculer $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$.

c. Déterminer la probabilité qu'un carton contienne au moins une pièce défectueuse.

3) Le responsable qualité exige que la probabilité qu'un carton de n pièces contienne au moins une pièce défectueuse reste strictement inférieure à $0{,}15$.
En détaillant la démarche, trouver la plus grande valeur de n compatible avec cette exigence.

Exercice 2

5 points

Partie A

Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.

1) Déterminer la limite de p en $-\infty$. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$.

2) Déterminer les variations de la fonction p sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

3) Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution, qui sera notée α.

4) Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.

5) Donner le tableau de signes de la fonction p sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + x^2}$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1) **a.** Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Déterminer la dérivée de la fonction f.

c. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ n'admet une tangente horizontale qu'au point d'abscisse 1.

2) Les concepteurs d'un skate-park utilisent la courbe $\mathscr{C}_f$ comme profil d'une rampe de skate. Ils estiment que la rampe assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.

On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression, pour tout réel x :

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^3},$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « la rampe assure-t-elle de bonnes sensations ? ». Justifier.

Exercice 3

4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 1$ et $b_n = a_n - 2$. On peut affirmer que :

a) (a_n) est arithmétique ;
b) (b_n) est géométrique ;
c) (a_n) est géométrique ;
d) (b_n) est arithmétique.

Dans les questions 2) et 3), on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$

2) On peut affirmer que :

a) $\begin{cases} u_2 = 5 \\ v_2 = 3 \end{cases}$ **b)** $u_2^2 - 3v_2^2 = -4$ **c)** $\dfrac{u_2}{v_2} = 1{,}75$ **d)** $5u_1 = 3v_1$

3) On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.

Ce programme renvoie :
a) u_{11} et v_{11} ;
b) u_{10} et v_{11} ;
c) les valeurs de u_n et v_n pour n allant de 1 à 10 ;
d) u_{10} et v_{10}.

```
def valeurs():
    u = 2
    v = 1
    for k in range(1, 11):
        c = u
        u = u + 3*v
        v = c + v
    return u, v
```

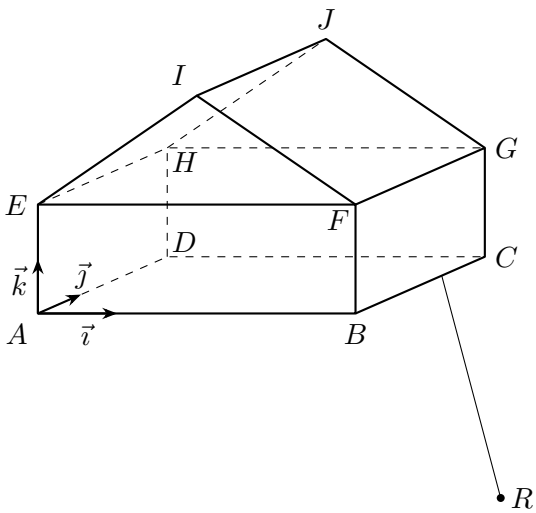
4) On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$. On peut affirmer que :

a) la suite (u_n) converge ;
b) pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 2$;
c) la suite (u_n) diverge ;
d) la suite (u_n) est majorée.

Exercice 4

5 points

Un chalet est formé d'un pavé droit $ABCDEFGH$ sur lequel repose un prisme droit $EFIHGJ$; la face EIF de ce prisme est un triangle isocèle en I, et le point I est situé dans le plan (ABE). Le chalet est schématisé ci-dessous.



Les dimensions sont $AB = 4$, $AD = 3$ et $AE = 2$.

On pose $\vec{\imath} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$, et on travaille dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

1) Lire dans ce repère les coordonnées des points B, E, F et G.

2) On admet que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EHI).

- **a.** Établir une équation cartésienne du plan (EHI).
- **b.** En déduire les coordonnées du point I.

3) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{EIF}$, arrondie au degré.

4) Le chalet doit être relié au réseau électrique par une tranchée rectiligne creusée à partir d'un boîtier de raccordement, situé plus bas que le chalet et représenté par le point $R(8\,;\,-4\,;\,-2)$. On modélise la tranchée par une portion de la droite Δ qui passe par R et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$. Le but est de s'assurer que la tranchée arrive au chalet sur l'arête $[BC]$.

- **a.** Écrire une représentation paramétrique de Δ.
- **b.** On admet que le plan (BFG) a pour équation $x = 4$. On appelle K le point où Δ coupe ce plan. Calculer les coordonnées de K.
- **c.** Le point K est-il situé sur l'arête $[BC]$?