Exercice 1

5 points

1) Dans la dernière colonne, le quotient $\dfrac{4}{u_n}$ vaut 4 pour $n = 0$, puis augmente de 1 à chaque rang : $5,\ 6,\ \ldots,\ 16$ pour $n = 12$.

On conjecture que, pour tout entier naturel n, $\boxed{\dfrac{4}{u_n} = n + 4}$.

2) Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n > 0$ ».

- **Initialisation** : $u_0 = 1 > 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : soit n un entier naturel tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n > 0$.
  Alors $4u_n > 0$ et $u_n + 4 > 4 > 0$. Le quotient de deux nombres strictement positifs est strictement positif, donc

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4} > 0 : \quad \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie.}$$

- **Conclusion** : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire ; par récurrence :

$$\boxed{u_n > 0 \text{ pour tout entier naturel } n}.$$

3) Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n + 4} - u_n = \frac{4u_n - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} = \frac{4u_n - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2}{u_n + 4}.$$

D'après la question 2), $u_n > 0$, donc $u_n^2 > 0$ et $u_n + 4 > 0$: on a $u_{n+1} - u_n < 0$.
La suite (u_n) est donc $\boxed{\text{strictement décroissante}}$.

4) La suite (u_n) est décroissante (question 3)) et minorée par 0 (question 2)).
D'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge}}$ vers une limite $\ell \geqslant 0$.

5) Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$, donc v_n est bien défini et

$$v_{n+1} = \frac{4}{u_{n+1}} = 4 \times \frac{u_n + 4}{4u_n} = \frac{u_n + 4}{u_n} = 1 + \frac{4}{u_n} = v_n + 1.$$

La suite (v_n) est donc $\boxed{\text{arithmétique de raison } r = 1}$, de premier terme $\boxed{v_0 = \dfrac{4}{u_0} = 4}$.

Pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 + n\,r$, soit $\boxed{v_n = n + 4}$.
La conjecture de la question 1) est démontrée.

6) Pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{4}{u_n}$ donc $u_n = \dfrac{4}{v_n}$, soit $\boxed{u_n = \dfrac{4}{n+4}}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (n + 4) = +\infty$, on obtient par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

Exercice 2

6 points

1) **a.** Les abscisses des points d'intersection sont les solutions de $f(x) = g(x)$. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc :

$$x^2\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \iff x^2 = 1 \iff x = -1 \text{ ou } x = 1.$$

Or $g(-1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ et $g(1) = \mathrm{e}^{-1}$. Les courbes se coupent en deux points :

$$\boxed{(-1\,;\,\mathrm{e})} \quad \text{et} \quad \boxed{\left(1\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right)}.$$

b. On étudie le signe de la différence : pour tout réel x,

$$f(x) - g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} = \left(x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x} = (x-1)(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f(x) - g(x)$ a le signe du trinôme $x^2 - 1$, de racines -1 et 1, positif à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- sur $]-\infty\,;\,-1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$: $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathscr{C}_g}$;
- sur $]-1\,;\,1[$: $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en dessous de } \mathscr{C}_g}$;
- en -1 et en 1, les courbes se coupent.

2) **a.** Pour tout $x \in [-1\,;\,1]$, $d(x) = \left(1 - x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$. On dérive le produit $u \times v$ avec $u(x) = 1 - x^2$, $u'(x) = -2x$, $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$:

$$d'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x} + \left(1 - x^2\right)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(-2x - 1 + x^2\right) = \boxed{\mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2x - 1\right)}.$$

b. Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $d'(x)$ a le signe du trinôme $x^2 - 2x - 1$.
Son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8 > 0$; ses racines sont

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} \approx -0{,}41 \quad \text{et} \quad x_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41.$$

Seule x_1 appartient à $[-1\,;\,1]$. Le trinôme est positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles. De plus $d(-1) = 0 \times \mathrm{e} = 0$ et $d(1) = 0 \times \mathrm{e}^{-1} = 0$.

x	-1		$1-\sqrt{2}$		1
$d'(x)$		$+$	0	$-$	
d	0	↗	$d\left(1-\sqrt{2}\right)$	↘	0

La fonction d est $\boxed{\text{croissante sur } \left[-1\,;\,1-\sqrt{2}\right]}$ et $\boxed{\text{décroissante sur } \left[1-\sqrt{2}\,;\,1\right]}$.

c. D'après le tableau, la distance $d(x)$ est maximale pour $\boxed{x_0 = 1 - \sqrt{2}}$.

On calcule $x_0^2 = \left(1-\sqrt{2}\right)^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$, donc $1 - x_0^2 = 2\sqrt{2} - 2$ et

$$M_0N_0 = d(x_0) = \left(2\sqrt{2}-2\right)\mathrm{e}^{\sqrt{2}-1} \approx 1{,}254, \quad \text{soit} \quad \boxed{M_0N_0 \approx 1{,}3} \text{ à } 0{,}1 \text{ près.}$$

3) Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f''(x)$ a le signe de $x^2 - 4x + 2$.

Discriminant : $\Delta = 16 - 8 = 8 > 0$; racines : $\dfrac{4-\sqrt{8}}{2} = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59$ et $2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41$.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		convexe		concave		convexe	

- f est $\boxed{\text{convexe sur } \left]-\infty\,;\,2-\sqrt{2}\right]}$ et sur $\left[2+\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$;
- f est $\boxed{\text{concave sur } \left[2-\sqrt{2}\,;\,2+\sqrt{2}\right]}$.

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en $2-\sqrt{2}$ et en $2+\sqrt{2}$: la courbe $\mathscr{C}_f$ admet $\boxed{\text{deux points d'inflexion}}$, d'abscisses $2-\sqrt{2}$ et $2+\sqrt{2}$.
Leurs ordonnées sont :

$$f\left(2-\sqrt{2}\right) = \left(6-4\sqrt{2}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{2}-2} \approx 0{,}19 \qquad \text{et} \qquad f\left(2+\sqrt{2}\right) = \left(6+4\sqrt{2}\right)\mathrm{e}^{-2-\sqrt{2}} \approx 0{,}38.$$

4) Un point d'abscisse x est commun à Δ et à $\mathscr{C}_g$ si et seulement si

$$\mathrm{e}^{-x} = x + 2 \iff \mathrm{e}^{-x} - x - 2 = 0 \iff h(x) = 0.$$

- **Variations.** Pour tout réel x, $h'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0$: h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- **Limites.** En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ (car $-x \to +\infty$) et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-2) = +\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.
  En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-2) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.
- **Conclusion.** La fonction h est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, de $+\infty$ à $-\infty$; 0 est compris entre ces limites. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une **unique** solution α dans $\mathbb{R}$.
- **Encadrement.** $h(-1) = \mathrm{e} - 1 > 0$ et $h(0) = -1 < 0$, donc $\alpha \in \left]-1\,;\,0\right[$. À la calculatrice :

$$h(-0{,}45) \approx 0{,}018 > 0, \qquad h(-0{,}445) \approx 0{,}005 > 0, \qquad h(-0{,}44) \approx -0{,}007 < 0,$$

donc $-0{,}445 < \alpha < -0{,}44$.

La droite Δ et la courbe $\mathscr{C}_g$ ont un **unique** point d'intersection, d'abscisse $\boxed{\alpha \approx -0{,}44}$ à $0{,}01$ près.

Exercice 3

4 points

1) On décompose les deux vecteurs directeurs dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, avec $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}, \qquad \overrightarrow{KH} = \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$$

S'il existait un réel k tel que $\overrightarrow{AI} = k\,\overrightarrow{KH}$, on aurait $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = k\,\overrightarrow{AD} + \frac{k}{2}\overrightarrow{AE}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ n'étant pas coplanaires, les coefficients seraient égaux : sur $\overrightarrow{AB}$, $\frac{1}{2} = 0$, ce qui est impossible.
Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{KH}$ ne sont pas colinéaires :

$$\boxed{\text{les droites } (AI) \text{ et } (KH) \text{ ne sont pas parallèles.}}$$

2) **a.** Dans ce repère, $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,1\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$, $F(1\,;\,0\,;\,1)$.
I est le milieu de $[EF]$ et J celui de $[BC]$:

$$\boxed{I\left(\tfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{J\left(1\,;\,\tfrac{1}{2}\,;\,0\right)}.$$

b. On a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. On remarque que

$$\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0-1\end{pmatrix} = \overrightarrow{IJ}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\boxed{\overrightarrow{IJ},\ \overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires.}}$$

3) **a.** $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-2-3\\ 2-(-1)\\ 3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\3\\2\end{pmatrix}$ dirige (MN), qui passe par $M(3\,;\,-1\,;\,1)$. Une représentation paramétrique de (MN) est :

$$\boxed{\begin{cases} x = 3 - 5s \\ y = -1 + 3s \quad s \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + 2s \end{cases}}$$

b. Un vecteur directeur de (d_1) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$. Les coordonnées 1 et -5, puis 1 et 3, ne sont pas proportionnelles : $\vec{u}$ et $\overrightarrow{MN}$ ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.

Elles sont sécantes si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} 4+t=3-5s \\ 1+t=-1+3s \\ 8+2t=1+2s \end{cases}$$

En soustrayant la deuxième équation à la première : $3 = 4-8s$, donc $s = \dfrac{1}{8}$, puis $t=-2+3s=-2+\dfrac{3}{8}=-\dfrac{13}{8}$.
Troisième équation : $8+2t=8-\dfrac{13}{4}=\dfrac{19}{4}$ alors que $1+2s=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$. Comme $\dfrac{19}{4}\neq\dfrac{5}{4}$, le système n'a pas de solution.

$$\boxed{\text{Les droites } (d_1) \text{ et } (MN) \text{ ne sont pas sécantes.}}$$

N'étant pas non plus parallèles, elles sont non coplanaires.

4) a. $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}0-3\\2-(-1)\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-5\\3\\2\end{pmatrix}$.
S'il existait k tel que $\overrightarrow{MP}=k\,\overrightarrow{MN}$, on aurait $k=\dfrac{3}{5}$ (abscisses) et $k=1$ (ordonnées) : impossible.
Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc M, N et P ne sont pas alignés :

$$\boxed{M,\ N \text{ et } P \text{ définissent un plan } (MNP).}$$

b. On cherche deux réels a et b tels que $\vec{u}=a\,\overrightarrow{MN}+b\,\overrightarrow{MP}$:

$$\begin{cases} -5a-3b=1 \\ 3a+3b=1 \\ 2a+3b=2 \end{cases}$$

La différence des deux dernières équations donne $a=-1$, puis $3b=1-3a=4$, soit $b=\dfrac{4}{3}$.
Vérification dans la première équation : $-5\times(-1)-3\times\dfrac{4}{3}=5-4=1$.

$$\vec{u}=-\overrightarrow{MN}+\frac{4}{3}\overrightarrow{MP}.$$

Un vecteur directeur de (d_1) est combinaison linéaire de deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (MNP) :

$$\boxed{(d_1) \text{ est parallèle au plan } (MNP).}$$

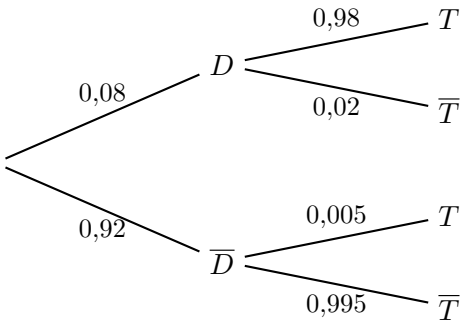
Remarque : le vecteur $\vec{n}(1\,;\,3\,;\,-2)$ est orthogonal à $\overrightarrow{MN}$ et à $\overrightarrow{MP}$; le plan (MNP) a pour équation $x+3y-2z+2=0$, et le point $(4\,;\,1\,;\,8)$ de (d_1) donne $4+3-16+2=-7\neq 0$: la droite est strictement parallèle au plan.

Exercice 4

5 points

Partie A

1) La sensibilité donne $P_D(T) = 0{,}98$, la spécificité donne $P_{\overline{D}}(\overline{T}) = 0{,}995$, et $P(D) = 0{,}08$.



2) Les évènements D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(D \cap T) + P\left(\overline{D} \cap T\right) = 0{,}08 \times 0{,}98 + 0{,}92 \times 0{,}005 = 0{,}0784 + 0{,}0046 = \boxed{0{,}083}.$$

3) **a.** On cherche $P_T(D)$:

$$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}0784}{0{,}083} \approx \boxed{0{,}945}.$$

b. $P_T(D) \approx 0{,}9446 < 0{,}95$: la condition fixée par le laboratoire n'est pas remplie.
Le test ne sera pas commercialisé.

Partie B

1) **a.** Contrôler un athlète est une épreuve de Bernoulli dont le succès « le test est positif » a pour probabilité $p = 0{,}103$. Les 5 athlètes étant choisis au hasard parmi un grand nombre de participants, on assimile ces contrôles à 5 répétitions identiques et indépendantes de cette épreuve. X compte le nombre de succès, donc

$$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(5\,;\,0{,}103)}.$$

b. $E(X) = n\,p = 5 \times 0{,}103 = \boxed{0{,}515}$.
Interprétation : si l'on répète un grand nombre de fois le contrôle de 5 athlètes, on observe en moyenne environ $0{,}515$ test positif par groupe de 5 athlètes contrôlés (environ 515 tests positifs pour $1\,000$ groupes).

c. L'évènement contraire de « au moins un test positif » est « aucun test positif » :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0{,}103)^5 = 1 - 0{,}897^5 \approx \boxed{0{,}419}.$$

2) On contrôle n athlètes (n entier naturel non nul) ; le nombre Y de tests positifs suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,0{,}103)$, et, comme ci-dessus, $P(Y \geqslant 1) = 1 - 0{,}897^n$.

$$\begin{aligned} 1 - 0{,}897^n \geqslant 0{,}75 &\iff 0{,}897^n \leqslant 0{,}25 \\ &\iff n\ln(0{,}897) \leqslant \ln(0{,}25) \quad \text{(la fonction } \ln \text{ est strictement croissante)} \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}897)} \quad \text{(on divise par } \ln(0{,}897) < 0\text{).} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}897)} \approx 12{,}75$. Vérification : $1 - 0{,}897^{12} \approx 0{,}729 < 0{,}75$ et $1 - 0{,}897^{13} \approx 0{,}757 \geqslant 0{,}75$.
Il faut contrôler au minimum $\boxed{13 \text{ athlètes}}$.