Calculatrice autorisée en mode examen

Le candidat doit traiter les 4 exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

5 points

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n + 4}$.

n	u_n	$\dfrac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

1) La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\dfrac{4}{u_n}$ (avec, pour les valeurs de u_n, affichage de deux chiffres pour les parties décimales).
À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\dfrac{4}{u_n}$ en fonction de n.
Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question 5)), et d'en déduire la limite de la suite (u_n) (question 6)).

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

3) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4) Que peut-on conclure des questions 2) et 3) concernant la suite (u_n) ?

5) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{4}{u_n}$.
Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

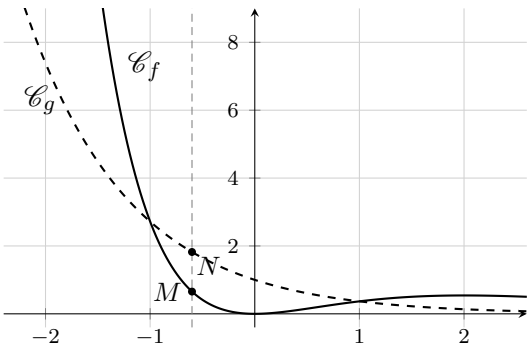
6) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

6 points

Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.



1) **a.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

b. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\,;\,1]$, on considère les points M de coordonnées $\big(x\,;\,f(x)\big)$ et N de coordonnées $\big(x\,;\,g(x)\big)$.
On note $d(x)$ la distance MN et on **admet** que $d(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x}$. On **admet** que la fonction d est dérivable sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ et on note d' sa fonction dérivée.

a. Montrer que $d'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2x - 1\right)$.

b. En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

c. Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d(x_0)$ maximale et donner une valeur approchée à $0{,}1$ près de la distance M_0N_0.

3) On **admet** que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f''(x) = \left(x^2 - 4x + 2\right)\mathrm{e}^{-x}$.
Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et préciser l'existence d'éventuel(s) point(s) d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$.

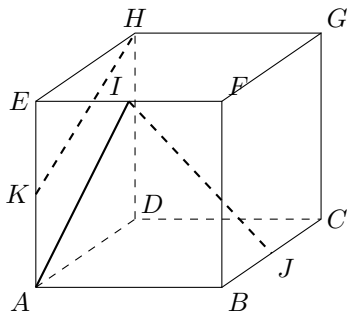
4) Soit Δ la droite d'équation $y = x + 2$.
On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - x - 2$.
En étudiant l'équation $h(x) = 0$, déterminer l'abscisse, arrondie à $0{,}01$ près, du (des) point(s) d'intersection de la droite Δ et de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Exercice 3

4 points

Les questions 1) à 4) de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère un cube $ABCDEFGH$. Le point I est le milieu du segment $[EF]$, le point J est le milieu du segment $[BC]$ et le point K est le milieu du segment $[AE]$.



1) Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

2) **a.** Donner les coordonnées des points I et J.

b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère :

- la droite (d_1) dont une représentation paramétrique est donnée par : $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + t \\ z = 8 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$;
- les points $M(3\,;\,-1\,;\,1)$, $N(-2\,;\,2\,;\,3)$ et $P(0\,;\,2\,;\,4)$.

3) **a.** Donner une représentation paramétrique de la droite (MN).

b. Les droites (d_1) et (MN) sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.

4) **a.** Justifier que les trois points M, N et P forment un plan.

b. **(Bonus)** Montrer que (d_1) est parallèle au plan (MNP).

Exercice 4

5 points

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test antidopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est $0{,}98$ (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est $0{,}995$ (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.
On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».
On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à $0{,}08$.

1) Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.

2) Démontrer que $P(T) = 0{,}083$.

3) **a.** Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?

b. Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à $0{,}95$.
Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est $0{,}103$.

1) Dans cette question, on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.

a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?

2) Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0{,}75$? Justifier.