Exercice 1

10 points

Partie A

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-1\\3-2\\1-0\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ vérifie $\vec{w}=-2\overrightarrow{AB}$: il est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et non nul, c'est donc un vecteur directeur de (AB).

Les deux autres ne conviennent pas : pour le vecteur de coordonnées $(-1\,;\,1\,;\,-1)$, les deux premières coordonnées imposeraient le coefficient 1, mais la troisième vaut $-1\neq 1\times 1$; pour le vecteur de coordonnées $(1\,;\,5\,;\,1)$, la première imposerait le coefficient -1 et la deuxième le coefficient 5.

Réponse **b.**

2) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1-1\\4-2\\2-0\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}=2\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et ont le point A en commun : les points A, B et D sont alignés.

(Les autres propositions sont fausses : $\overrightarrow{AE}(0\,;\,3\,;\,1)$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}(-1\,;\,1\,;\,1)$, car sa première coordonnée est nulle mais pas les autres ; $\overrightarrow{BD}(-1\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{BE}(1\,;\,2\,;\,0)$ ne sont pas colinéaires, la troisième coordonnée de $\overrightarrow{BE}$ étant nulle et pas celle de $\overrightarrow{BD}$.)

Réponse **c.**

3) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-2\\8\\4\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (premières coordonnées égales, deuxièmes différentes) : les points A, D, F définissent un plan. On cherche deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AD}+\beta\overrightarrow{AF}$:

$$\begin{cases}-2\alpha-2\beta=0\\2\alpha+8\beta=3\\2\alpha+4\beta=1\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha=-\beta\\6\beta=3\\2\alpha+4\beta=1\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{2}\\\beta=\frac{1}{2}\\-1+2=1\text{ (vrai)}\end{cases}$$

Ainsi $\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$: les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ sont coplanaires, donc $E\in(ADF)$.

(Contrôle des autres propositions : $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ avec $\overrightarrow{AC}(0\,;\,-1\,;\,-1)$ donne $-\alpha=0$, puis $-\beta=3$ et $-\beta=1$: impossible, donc $E\notin(ABC)$. Comme $D\in(AB)$, le plan (BCD) est le plan (ABC), donc $E\notin(BCD)$.)

Réponse **a.**

Partie B

1) f est définie là où $x^2+x+3>0$. Le trinôme x^2+x+3 a pour discriminant $\Delta=1^2-4\times1\times3=-11<0$: il ne s'annule pas et garde le signe de son coefficient $a=1>0$. Donc, pour tout réel x, $x^2+x+3>0$ et f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) $f = \ln(u)$ avec $u(x) = x^2 + x + 3$, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$; $f' = \dfrac{u'}{u}$:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3}.$$

Le dénominateur est strictement positif, donc $f'(x)$ a le signe de $2x+1$, qui s'annule en $-\dfrac{1}{2}$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3\right) = \ln\left(\frac{11}{4}\right).$$

Limites. Pour $x \neq 0$, $x^2 + x + 3 = x^2\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)$; donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^2+x+3\right) = +\infty$. Comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$, par composition :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$\ln\left(\frac{11}{4}\right)$	↗	$+\infty$

f admet un **minimum égal à $\ln\left(\frac{11}{4}\right) \approx 1{,}01$, atteint en $-\frac{1}{2}$** ; elle n'a pas de maximum.

3) On dérive $f' = \dfrac{v}{u}$ avec $v(x) = 2x+1$ et $u(x) = x^2+x+3$:

$$f''(x) = \frac{2\left(x^2+x+3\right) - (2x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x+3\right)^2} = \frac{2x^2+2x+6-4x^2-4x-1}{\left(x^2+x+3\right)^2} = \frac{-2x^2-2x+5}{\left(x^2+x+3\right)^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif : $f''(x)$ a le signe de $-2x^2-2x+5$. Discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4\times(-2)\times 5 = 44 > 0$, $\sqrt{44} = 2\sqrt{11}$, d'où deux racines :

$$x_1 = \frac{2+2\sqrt{11}}{-4} = \frac{-1-\sqrt{11}}{2} \approx -2{,}16 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2-2\sqrt{11}}{-4} = \frac{-1+\sqrt{11}}{2} \approx 1{,}16.$$

Le coefficient -2 est négatif : le trinôme est positif entre les racines, négatif à l'extérieur.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{11}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
convexité		concave		convexe		concave	

f est **convexe sur $\left[\frac{-1-\sqrt{11}}{2} ; \frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right]$** et concave sur $\left]-\infty ; \frac{-1-\sqrt{11}}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{-1+\sqrt{11}}{2} ; +\infty\right[$.

f'' s'annule en changeant de signe en x_1 et en x_2 : la courbe de f admet deux points d'inflexion, d'abscisses $\boxed{\dfrac{-1-\sqrt{11}}{2}}$ et $\boxed{\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}}$.

Exercice 2

10 points

Partie A

1) $80\,\%$ des 300 employés en télétravail en septembre 2021 le restent et 500 nouveaux s'y ajoutent :

$$a_1 = 0{,}8 \times 300 + 500 = 240 + 500 = \boxed{740}.$$

2) Le mois n, il y a a_n employés en télétravail. Le mois suivant, $80\,\%$ d'entre eux le restent, soit $0{,}8\,a_n$ employés (garder $80\,\%$, c'est multiplier par $0{,}8$), auxquels s'ajoutent 500 nouveaux employés. Donc, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{a_{n+1} = 0{,}8\,a_n + 500}.$$

3) **a.** Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 2\,500 = 0{,}8\,a_n + 500 - 2\,500 = 0{,}8\,a_n - 2\,000 \\ &= 0{,}8\left(a_n - \frac{2\,000}{0{,}8}\right) = 0{,}8\,(a_n - 2\,500) = 0{,}8\,v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc $\boxed{\text{géométrique de raison } q = 0{,}8}$, de premier terme $v_0 = a_0 - 2\,500 = 300 - 2\,500 = \boxed{-2\,200}$.

b. D'après le cours, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$, soit

$$\boxed{v_n = -2\,200 \times 0{,}8^n}.$$

Comme $a_n = v_n + 2\,500$:

$$\boxed{a_n = 2\,500 - 2\,200 \times 0{,}8^n}.$$

4) On répète le calcul du terme suivant tant que le nombre d'employés en télétravail ne dépasse pas $2\,000$, en comptant les mois :

```
A = 300
n = 0
while A <= 2000 :
    A = 0.8*A + 500
    n = n + 1
print(n)
```

Pour information, le programme affiche 7 : $a_6 = 2\,500 - 2\,200 \times 0{,}8^6 \approx 1\,923{,}3 \leqslant 2\,000$ et $a_7 = 2\,500 - 2\,200 \times 0{,}8^7 \approx 2\,038{,}6 > 2\,000$. Le nombre d'employés en télétravail dépasse $2\,000$ au bout de 7 mois, c'est-à-dire en avril 2022.

Partie B

1) f est un quotient de fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$, dont le dénominateur $x+2$ ne s'annule pas sur cet intervalle ; avec $u(x)=4x+3$ et $v(x)=x+2$, $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$:

$$f'(x)=\frac{4(x+2)-(4x+3)\times 1}{(x+2)^2}=\frac{4x+8-4x-3}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}.$$

Pour tout $x\geqslant 0$, $f'(x)>0$: $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[}$.

2) Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$: « $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 3$ ». Remarquons que $u_{n+1}=f(u_n)$.
Initialisation. $u_0=1$ et $u_1=\dfrac{4\times 1+3}{1+2}=\dfrac{7}{3}\approx 2{,}33$. On a bien $0\leqslant 1\leqslant\dfrac{7}{3}\leqslant 3$: $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et tous les nombres ci-dessous appartiennent à cet intervalle :

$$\begin{aligned}
&0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 3\\
\Longrightarrow\ &f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(3) && (f \text{ est croissante sur } [0\,;+\infty[)\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{3}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 3 && (f(0)=\tfrac{3}{2},\ f(3)=\tfrac{15}{5}=3)
\end{aligned}$$

Comme $0\leqslant\dfrac{3}{2}$, on obtient $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 3$: $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire ; par récurrence, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 3}.$$

3) D'après la question 2), pour tout n, $u_n\leqslant u_{n+1}$: la suite (u_n) est croissante ; et $u_n\leqslant 3$: elle est majorée par 3. D'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$.

4) Notons ℓ sa limite. Pour tout n, $0\leqslant u_n\leqslant 3$, donc $0\leqslant\ell\leqslant 3$. La fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$ et $u_{n+1}=f(u_n)$; en passant à la limite, $\ell=f(\ell)$:

$$\begin{aligned}
\ell=\frac{4\ell+3}{\ell+2}\ &\Longleftrightarrow\ \ell(\ell+2)=4\ell+3 && (\ell+2\neq 0)\\
&\Longleftrightarrow\ \ell^2-2\ell-3=0\\
&\Longleftrightarrow\ (\ell-3)(\ell+1)=0\\
&\Longleftrightarrow\ \ell=3 \text{ ou } \ell=-1.
\end{aligned}$$

Comme $\ell\geqslant 0$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3}$.
Interprétation : u_n étant exprimé en milliers, le nombre d'employés satisfaits par le télétravail augmente et se rapproche, à long terme, de $3\,000$ (sur les $4\,000$ employés de la société).

Exercice 3

10 points

Partie A

1) Pour $x > 0$:

$$f(x) = 0 \iff 2\ln(x) - 1 = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$$

L'unique solution est $\boxed{\alpha = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}} \approx 1{,}65}$.

2) *Dérivée.* $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2\ln(x) - 1$, $u'(x) = \dfrac{2}{x}$, $v(x) = x$, $v'(x) = 1$:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - (2\ln(x) - 1) \times 1}{x^2} = \frac{2 - 2\ln(x) + 1}{x^2} = \frac{3 - 2\ln(x)}{x^2}.$$

$x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $3 - 2\ln(x)$:

$$3 - 2\ln(x) > 0 \iff \ln(x) < \frac{3}{2} \iff x < \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}.$$

$f\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{2 \times \frac{3}{2} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} = 2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}45.$

Limite en 0. $\lim\limits_{x \to 0^+} (2\ln(x) - 1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$; par produit, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

Limite en $+\infty$. $f(x) = 2\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{x}$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$	↘	0

Partie B

1) Posons $X = \ln(x)$; alors $g(x) = X^2 - X = X(X-1)$.

- En 0 : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} X(X-1) = +\infty$ (produit de deux facteurs tendant vers $-\infty$). Par composition, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty}$.
- En $+\infty$: on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$,
  et $\lim\limits_{X \to +\infty} X(X-1) = +\infty$. Par composition, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$.

2) g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. La dérivée de $(\ln(x))^2$ est $2\ln(x)\times\dfrac{1}{x}$ (forme $(u^2)'=2uu'$), donc :

$$g'(x)=\frac{2\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}=\frac{2\ln(x)-1}{x}=f(x).$$

Ainsi, pour tout $x\in]0\,;\,+\infty[$, $\boxed{g'(x)=f(x)}$.

3) Pour $x>0$, $g'(x)=f(x)$ a le signe de $2\ln(x)-1$: négatif sur $]0\,;\,\sqrt{\mathrm{e}}[$, nul en $\sqrt{\mathrm{e}}$, positif sur $]\sqrt{\mathrm{e}}\,;\,+\infty[$ (car $2\ln(x)-1>0 \iff x>\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$).

$$g\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}.$$

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

Le minimum de g sur $]0\,;\,+\infty[$ est $\boxed{-\dfrac{1}{4}}$, atteint en $\sqrt{\mathrm{e}}$.

4) g est continue sur $]0\,;\,+\infty[$ (car dérivable). Sur $]0\,;\,\sqrt{\mathrm{e}}]$, elle est strictement décroissante de $+\infty$ à $-\frac{1}{4}$; sur $[\sqrt{\mathrm{e}}\,;\,+\infty[$, strictement croissante de $-\frac{1}{4}$ à $+\infty$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, appliqué sur chacun des deux intervalles :

- si $m<-\dfrac{1}{4}$: $\boxed{\text{aucune solution}}$;
- si $m=-\dfrac{1}{4}$: $\boxed{\text{une seule solution}}$, $x=\sqrt{\mathrm{e}}$;
- si $m>-\dfrac{1}{4}$: $\boxed{\text{deux solutions}}$, une dans $]0\,;\,\sqrt{\mathrm{e}}[$ et une dans $]\sqrt{\mathrm{e}}\,;\,+\infty[$.

5) Pour $x>0$:

$$\begin{aligned} g(x)=0 &\iff \ln(x)\left(\ln(x)-1\right)=0\\ &\iff \ln(x)=0 \text{ ou } \ln(x)=1\\ &\iff x=1 \text{ ou } x=\mathrm{e}. \end{aligned}$$

$$\boxed{S=\{1\,;\,\mathrm{e}\}}$$

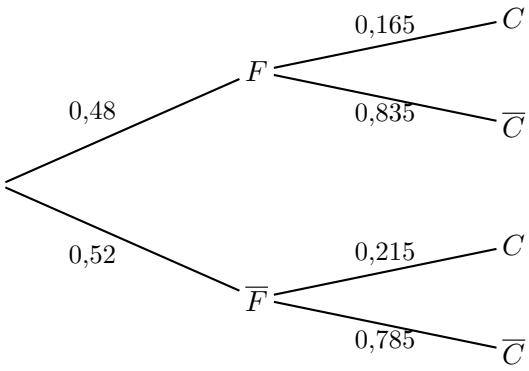
Ce résultat est cohérent avec la question 4) ($0>-\frac{1}{4}$: deux solutions, $1<\sqrt{\mathrm{e}}<\mathrm{e}$).

Exercice 4

10 points

Partie A

1) On note $\overline{F}$ l'évènement « la personne choisie est un homme » et $\overline{C}$ le contraire de C.



2) $P(F \cap C) = P(F) \times P_F(C) = 0{,}48 \times 0{,}165 = \boxed{0{,}0792}$.

3) F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(F \cap C) + P(\overline{F} \cap C) \\ &= 0{,}0792 + 0{,}52 \times 0{,}215 \\ &= 0{,}0792 + 0{,}1118 \\ &= \boxed{0{,}191}. \end{aligned}$$

4) $P(F) \times P(C) = 0{,}48 \times 0{,}191 = 0{,}09168$, alors que $P(F \cap C) = 0{,}0792$.
$P(F \cap C) \neq P(F) \times P(C)$: les évènements F et C $\boxed{\text{ne sont pas indépendants}}$.

5)

$$P_C(F) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}0792}{0{,}191} \approx \boxed{0{,}4147}.$$

Interprétation : parmi les cadres de l'entreprise, environ $41{,}47\,\%$ sont des femmes.

Partie B

1) On répète 15 fois, de façon identique et indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise), une épreuve de Bernoulli dont le succès « le salarié choisi est un cadre » a pour probabilité $p = 0{,}191$. X compte le nombre de succès : X suit la $\boxed{\text{loi binomiale } \mathcal{B}(15\,;\,0{,}191)}$.

2) Pour tout entier k entre 0 et 15, $P(X = k) = \binom{15}{k} \times 0{,}191^k \times 0{,}809^{15-k}$.

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= 0{,}809^{15} + 15 \times 0{,}191 \times 0{,}809^{14} \\ &\approx 0{,}0416 + 0{,}1474 \\ &\approx \boxed{0{,}1890}. \end{aligned}$$

3) $E(X) = n \times p = 15 \times 0{,}191 = \boxed{2{,}865}$.

4) Dans un échantillon de n salariés, le nombre Y de cadres suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,0{,}191)$, et $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}809^n$.

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}99 &\iff 1 - 0{,}809^n \geqslant 0{,}99 \\ &\iff 0{,}809^n \leqslant 0{,}01 \\ &\iff n\ln(0{,}809) \leqslant \ln(0{,}01) \quad \text{(la fonction } \ln \text{ est strictement croissante)} \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}809)} \quad \text{(on divise par } \ln(0{,}809) < 0\text{)} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}809)} \approx 21{,}73$. La valeur minimale est $\boxed{n = 22}$.

Contrôle : $1 - 0{,}809^{21} \approx 0{,}9883 < 0{,}99$ et $1 - 0{,}809^{22} \approx 0{,}9906 \geqslant 0{,}99$.