Calculatrice autorisée en mode examen

Le sujet est composé de 4 exercices. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

10 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$. On considère les points :

$$A(1\,;\,2\,;\,0),\quad B(0\,;\,3\,;\,1),\quad C(1\,;\,1\,;\,-1),\quad D(-1\,;\,4\,;\,2),\quad E(1\,;\,5\,;\,1),\quad F(-1\,;\,10\,;\,4).$$

Pour chaque question, **une seule réponse proposée est exacte**. Indiquer la bonne réponse à chacune des questions en justifiant soigneusement.

1) Un vecteur directeur de la droite (AB) a pour coordonnées…

a. $\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$

2) On peut affirmer que les points…

a. A, B et E sont alignés. **b.** B, D et E sont alignés. **c.** A, B et D sont alignés.

3) On peut affirmer que…

a. $E \in (ADF)$ **b.** $E \in (ABC)$ **c.** $E \in (BCD)$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + x + 3\right)$.

1) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Dresser le tableau de variations de f. On y fera apparaître les limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuels extremums.

3) Étudier la convexité de f. On précisera les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f.

Exercice 2

10 points

Pour limiter les trajets domicile-travail de son personnel, une société implantée en France offre, à partir de septembre 2021, à chacun de ses $4\,000$ employés la possibilité de travailler depuis chez lui plutôt que sur site.

En septembre 2021, 300 employés optent pour le télétravail. On observe ensuite, d'un mois sur l'autre, que $80\,\%$ des employés en télétravail le mois précédent le restent et que 500 nouveaux employés font ce choix.

Pour tout entier naturel n, on note a_n une estimation du nombre d'employés en télétravail n mois après septembre 2021; on a donc $a_0 = 300$.

Partie A

1) Déterminer a_1.

2) Expliquer pourquoi l'on a $a_{n+1} = 0{,}8\,a_n + 500$ pour tout entier naturel n.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = a_n - 2\,500$.

a. Prouver que la suite (v_n) est géométrique ; on donnera sa raison et son premier terme.

b. En déduire l'expression de v_n, puis celle de a_n, en fonction de n.

4) Le programme Python ci-contre doit afficher le nombre de mois nécessaires pour que le nombre d'employés en télétravail dépasse strictement $2\,000$. Recopier et compléter ses lignes.

```
A = 300
n = 0
while ............ :
    A = ..........
    n = ..........
print(.....)
```

Partie B

Pour mesurer l'adhésion du personnel à cette organisation, la direction estime le nombre d'employés qui s'en déclarent satisfaits à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{u_n + 2},$$

où u_n est le nombre, exprimé en milliers, d'employés satisfaits n mois après septembre 2021.

1) Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x+3}{x+2}$. Montrer que f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2) Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

3) En déduire que la suite (u_n) converge.

4) Calculer la limite de (u_n) et donner sa signification pour l'entreprise.

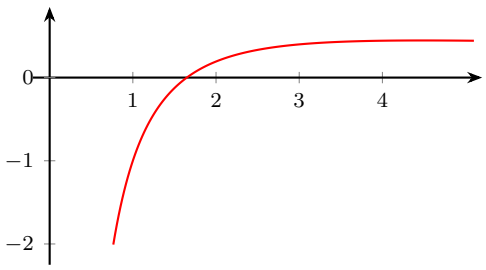
Exercice 3

10 points

Partie A

Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthonormé, la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1) Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$. On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième.

2) Dresser le tableau de variations de f en y faisant apparaître les limites en 0 et en $+\infty$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x).$$

1) Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.
2) Démontrer que pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = f(x)$ où f est la fonction étudiée dans la partie A.
3) Dresser le tableau de variations de g. On fera figurer dans ce tableau les limites de g aux bornes de son ensemble de définition, ainsi que la valeur de son minimum sur $]0\,;\,+\infty[$.
4) Discuter suivant les valeurs du réel m le nombre de solutions de l'équation $g(x) = m$.
5) Résoudre par le calcul l'équation $g(x) = 0$.

Exercice 4

10 points

Dans tout cet exercice, les résultats seront arrondis si besoin à 10^{-4} près.

Partie A

Une étude statistique réalisée dans une entreprise fournit les informations suivantes :

- $48\,\%$ des salariés sont des femmes ; parmi elles, $16{,}5\,\%$ exercent une profession de cadre ;
- $52\,\%$ des salariés sont des hommes ; parmi eux, $21{,}5\,\%$ exercent une profession de cadre.

On choisit au hasard une personne parmi les salariés, et on considère les évènements :

- F : « la personne choisie est une femme » ;
- C : « la personne choisie exerce une profession de cadre ».

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.
2) Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre.
3) Démontrer que la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à $0{,}191$.
4) Les évènements F et C sont-ils indépendants ?
5) Calculer la probabilité de F sachant C, notée $P_C(F)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On choisit au hasard un échantillon de 15 salariés. Le grand nombre de salariés dans l'entreprise permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres au sein de l'échantillon de 15 salariés. On rappelle que la probabilité qu'un salarié choisi au hasard soit un cadre est égale à $0{,}191$.

1) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2) Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre.
3) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.
4) Soit n un entier naturel non nul. On considère dans cette question un échantillon de n salariés. Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à $0{,}99$? On répondra à cette question par le calcul.