Exercice 1

14 points

Partie A

1) a. La fonction f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ (la fonction $x \mapsto 1+x$ y est dérivable et strictement positive) et, pour tout $x > -1$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Comme $1+x > 0$, on a $f'(x) > 0$: la fonction f est $\boxed{\text{strictement croissante sur }]-1\,;+\infty[}$.

b. *En* -1. $\lim\limits_{x\to -1^+}(1+x) = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty$, donc par composition $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(1+x) = -\infty$.
Par somme :

$$\boxed{\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty}.$$

En $+\infty$. $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty} \ln X = +\infty$, donc par composition

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}.$$

2) La fonction f' est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et, pour tout $x > -1$:

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0.$$

La fonction f est donc $\boxed{\text{concave sur }]-1\,;+\infty[}$.

3) a. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1}(-x) = 1$, donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to -1} g(x) = -\infty}$.

b. On pose $X = 1+x$: quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$, et par croissances comparées $\lim\limits_{X\to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0}.$$

Pour tout $x > -1$, on factorise par $1+x$:

$$g(x) = 1 + \ln(1+x) - x = (1+x)\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} - 1\right) + 2.$$

Quand $x \to +\infty$: la parenthèse tend vers $0 - 1 = -1$ et $1+x$ tend vers $+\infty$, donc par produit puis somme

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty}.$$

c. g est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et, pour tout $x > -1$:

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x}{1+x} = \boxed{\frac{-x}{1+x}}.$$

Comme $1+x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-x$: positif sur $]-1\,;0]$, nul en 0, négatif sur $[0\,;+\infty[$.
De plus $g(0) = 1 + \ln 1 - 0 = 1$.

g est strictement croissante sur $]-1\,;0]$ et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$:

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

d. *Sur* $]-1\,;0]$. g est continue et strictement croissante, $\lim\limits_{x\to-1} g(x) = -\infty$ et $g(0) = 1$. Comme $0 \in]-\infty\,;1]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1\,;0]$ (et $\alpha \neq 0$ car $g(0) = 1$).

Sur $[0\,;+\infty[$. g est continue et strictement décroissante, $g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Comme $0 \in]-\infty\,;1]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β dans $[0\,;+\infty[$, et $\beta \neq 0$ car $g(0) = 1$: $\beta > 0$.

L'équation $g(x) = 0$ admet donc exactement deux solutions $\alpha \in]-1\,;0]$ et $\beta > 0$. À la calculatrice : $\alpha \approx -0{,}841$ et $\beta \approx 2{,}146$.

e. D'après le tableau de variations et la question précédente :

x	-1		α		β		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Or $g(x) = f(x) - x$ est la différence entre l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ et celle du point de $\mathcal{D}$ de même abscisse x. Donc :

- sur $]-1\,;\alpha[$ et sur $]\beta\,;+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{D}$;
- sur $]\alpha\,;\beta[$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$;
- $\mathscr{C}_f$ et $\mathcal{D}$ se coupent aux points d'abscisses α et β.

f. **i.** La boucle s'exécute tant que $b - a > 0{,}1$ (valeurs de $g(m)$ arrondies au millième) :

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	2	2	2	2,125	2,125
b	3	2,5	2,25	2,25	2,1875
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	2,5	2,25	2,125	2,1875	
$g(m)$	$\approx -0{,}247$	$\approx -0{,}071$	$\approx 0{,}014$	$\approx -0{,}028$	
$g(m) < 0$?	vrai	vrai	faux	vrai	

À l'étape 5, $b - a = 0{,}0625 \leqslant 0{,}1$: la boucle s'arrête et la fonction renvoie $(2{,}125\,;\,2{,}1875)$.

ii. Au départ $g(2) = 1 + \ln 3 - 2 \approx 0{,}099 > 0$ et $g(3) = 1 + \ln 4 - 3 \approx -0{,}614 < 0$, donc $\beta \in [2\,;3]$. À chaque étape, on garde la moitié de l'intervalle $[a\,;b]$ sur laquelle g change de signe ($g(a) > 0$ et $g(b) < 0$) : comme g est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$, β

reste toujours entre a et b.
Les deux valeurs affichées forment donc un encadrement de β d'amplitude inférieure ou égale à $0{,}1$ (méthode par dichotomie) : $\boxed{2{,}125 \leqslant \beta \leqslant 2{,}1875}$.

Partie B

1) *Préliminaire.* $g(2) = \ln 3 - 1 > 0$ (car $3 > \mathrm{e}$) et $g(\beta) = 0$; g étant strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$, on en déduit $2 < \beta$. De plus $f(\beta) = \beta$ puisque $g(\beta) = f(\beta) - \beta = 0$.
Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$: « $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$ ».
Initialisation. $u_0 = 2$ et $2 \leqslant 2 \leqslant \beta$: $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie.

$$\begin{aligned} & 2 \leqslant u_n \leqslant \beta \\ \iff\ & f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(\beta) && (f \text{ est strictement croissante sur }]-1\,;+\infty[) \\ \iff\ & 1 + \ln 3 \leqslant u_{n+1} \leqslant \beta && (\text{car } f(\beta) = \beta) \\ \implies\ & 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant \beta && (\text{car } 1 + \ln 3 \geqslant 2, \text{ puisque } \ln 3 > 1) \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence, pour tout entier naturel n, $\boxed{2 \leqslant u_n \leqslant \beta}$.

2) Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n).$$

Or $u_n \in [2\,;\beta]$ et $[2\,;\beta] \subset]\alpha\,;\beta]$ (car $\alpha \leqslant 0$). D'après la question A.3.e, g est positive ou nulle sur $]\alpha\,;\beta]$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$: la suite (u_n) est croissante.
La suite (u_n) est croissante et majorée par β : d'après le théorème de convergence monotone, elle est $\boxed{\text{convergente}}$.

3) Notons ℓ sa limite. Comme $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$ pour tout n, on a $2 \leqslant \ell \leqslant \beta$. La fonction f est continue sur $]-1\,;+\infty[$, donc en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$:

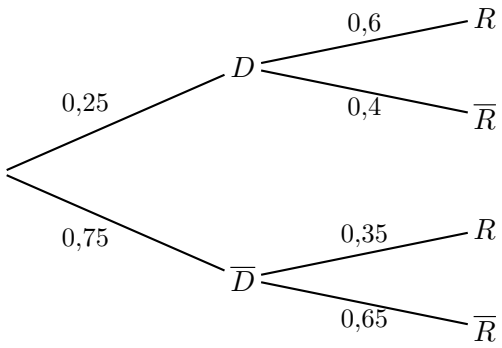
$$\ell = f(\ell) \iff f(\ell) - \ell = 0 \iff g(\ell) = 0 \iff \ell = \alpha \text{ ou } \ell = \beta.$$

Comme $\ell \geqslant 2 > 0 \geqslant \alpha$, on obtient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta}$.

Exercice 2

9 points

1) **a.** Un quart des tirs sont à deux points : $P(D) = 0{,}25$ et $P\left(\overline{D}\right) = 0{,}75$; $P_D(R) = 0{,}6$ et $P_{\overline{D}}(R) = 0{,}35$.



b. $P\left(\overline{D} \cap R\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(R) = 0{,}75 \times 0{,}35 = \boxed{0{,}2625}$.

c. D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(D \cap R) + P\left(\overline{D} \cap R\right) \\ &= 0{,}25 \times 0{,}6 + 0{,}2625 \\ &= 0{,}15 + 0{,}2625 \\ &= \boxed{0{,}4125}. \end{aligned}$$

d. On cherche $P_R\left(\overline{D}\right)$:

$$P_R\left(\overline{D}\right) = \frac{P\left(\overline{D} \cap R\right)}{P(R)} = \frac{0{,}2625}{0{,}4125} = \frac{7}{11} \approx \boxed{0{,}636}.$$

2) **a.** Chaque tir est une épreuve de Bernoulli de succès « le tir est réussi », de probabilité $p = 0{,}35$. On répète 10 fois cette épreuve de façon identique et indépendante, et X compte le nombre de succès. Donc X suit la $\boxed{\text{loi binomiale } \mathcal{B}(10\,;\,0{,}35)}$.

b. $E(X) = np = 10 \times 0{,}35 = \boxed{3{,}5}$.
Sur un grand nombre de séries de 10 tirs à trois points, Stéphanie réussit en moyenne $3{,}5$ tirs par série.

c. Pour tout entier k entre 0 et 10, $P(X = k) = \binom{10}{k} \times 0{,}35^k \times 0{,}65^{10-k}$. Donc

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0{,}35^5 \times 0{,}65^5 = 252 \times 0{,}35^5 \times 0{,}65^5 \approx \boxed{0{,}154}.$$

d. Sur 10 tirs, rater 4 tirs ou plus revient à en réussir 6 au plus :

$P(X \leqslant 6) \approx \boxed{0{,}974}$ (calculatrice, fonction de répartition de la loi binomiale).

e. Rater au plus 6 tirs revient à en réussir au moins 4 :

$$P(X \geqslant 4) = 1 - P(X \leqslant 3) \approx 1 - 0{,}514 \approx \boxed{0{,}486}.$$

f. On cherche $P_{(X\geqslant 5)}(X<8)$:

$$P_{(X\geqslant 5)}(X<8)=\frac{P\big((X\geqslant 5)\cap(X<8)\big)}{P(X\geqslant 5)}=\frac{P(5\leqslant X\leqslant 7)}{1-P(X\leqslant 4)}.$$

À la calculatrice, $P(5\leqslant X\leqslant 7)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)\approx 0{,}24368$ et $P(X\geqslant 5)\approx 0{,}24850$, donc

$$P_{(X\geqslant 5)}(X<8)\approx\frac{0{,}24368}{0{,}24850}\approx\boxed{0{,}981}.$$

3) Avec les mêmes arguments qu'en 2)a., le nombre Y de tirs réussis sur n tirs suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,0{,}35)$, et

$$P(Y\geqslant 1)=1-P(Y=0)=1-0{,}65^n.$$

On résout, pour n entier naturel non nul :

$$\begin{aligned}
&1-0{,}65^n\geqslant 0{,}99\\
\iff\ &0{,}65^n\leqslant 0{,}01\\
\iff\ &n\ln(0{,}65)\leqslant\ln(0{,}01) && \text{(la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0\,;+\infty[)\\
\iff\ &n\geqslant\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}65)} && \text{(on divise par } \ln(0{,}65)<0\text{, l'ordre change)}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}65)}\approx 10{,}69$. Vérification : $1-0{,}65^{10}\approx 0{,}987<0{,}99$ et $1-0{,}65^{11}\approx 0{,}991\geqslant 0{,}99$.

La valeur minimale est $\boxed{n=11}$ tirs.

Exercice 3

7 points

Dans le repère $\left(A\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$: $A(0\,;0\,;0)$, $B(3\,;0\,;0)$, $D(0\,;2\,;0)$, $E(0\,;0\,;1)$, $F(3\,;0\,;1)$, $H(0\,;2\,;1)$ et $C(3\,;2\,;0)$.

1) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, donc $\boxed{G(3\,;2\,;1)}$.

2) Comme $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ est normal au plan (EHI), ce plan a une équation de la forme $2x - 3z + d = 0$.
$E(0\,;0\,;1)$ appartient au plan : $2\times 0 - 3\times 1 + d = 0$, d'où $d = 3$.
Une équation cartésienne du plan (EHI) est $\boxed{2x - 3z + 3 = 0}$.
Contrôle : $H(0\,;2\,;1)$ vérifie bien $0 - 3 + 3 = 0$.

3) Le triangle EIF est une face (un pignon) de la maison : il est dans le plan de la façade $(ABFE)$, d'équation $y = 0$. Il est isocèle en I, donc I est sur la médiatrice de $[EF]$ dans ce plan : son abscisse est celle du milieu de $[EF]$, $x_I = \dfrac{0+3}{2} = \dfrac{3}{2}$.
Enfin I appartient au plan (EHI) :

$$2\times\frac{3}{2} - 3z_I + 3 = 0 \iff 6 - 3z_I = 0 \iff z_I = 2.$$

Donc $\boxed{I\left(\frac{3}{2}\,;0\,;2\right)}$. *Contrôle :* $IE = IF = \sqrt{\frac{9}{4}+1} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

4) $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$, donc

$$\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IF} = -\frac{9}{4} + 0 + 1 = -\frac{5}{4} \quad \text{et} \quad IE\times IF = \frac{\sqrt{13}}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{13}{4}.$$

Or $\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IF} = IE\times IF\times\cos\widehat{EIF}$, donc

$$\cos\widehat{EIF} = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{13}{4}} = -\frac{5}{13} \quad \text{et} \quad \widehat{EIF} \approx \boxed{113^\circ} \text{ (au degré près).}$$

5) **a.** Δ passe par $R(6\,;-3\,;-1)$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$:

$$\boxed{\Delta : \begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -3 + 4t \quad t\in\mathbb{R} \\ z = -1 + t \end{cases}}$$

b. Le point de Δ de paramètre t appartient au plan (BFG) si et seulement si

$$6 - 3t = 3 \iff 3t = 3 \iff t = 1.$$

Pour $t = 1$: $x = 3$, $y = -3 + 4 = 1$, $z = -1 + 1 = 0$. Donc $\boxed{K(3\,;1\,;0)}$.

c. $B(3\,;0\,;0)$ et $C(3\,;2\,;0)$: le milieu de $[BC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{3+3}{2}\,;\frac{0+2}{2}\,;\frac{0+0}{2}\right) = (3\,;1\,;0)$.
K est donc le milieu de $[BC]$: $\boxed{K \text{ appartient bien à l'arête } [BC]}$ et la tranchée atteint la maison au niveau de cette arête.

Exercice 4

10 points

Partie A : une équation différentielle

1) La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $(0\,;3)$: $\boxed{f(0) = 3}$.

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente (T), qui passe par $(0\,;3)$ et $(1\,;1)$: $f'(0) = \frac{1-3}{1-0}$, soit $\boxed{f'(0) = -2}$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x + a - b\mathrm{e}^{-x}$. Donc :

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f'(0) = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + b = 3 \\ 1 + a - b = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2 \\ a = -3 + b = -1 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{a = -1}$, $\boxed{b = 2}$ et $\boxed{f(x) = \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x}}$.

3) **a.** g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - 2\mathrm{e}^{-x}$. Pour tout réel x :

$$g'(x) + g(x) = \mathrm{e}^x - 1 - 2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^x - x - 1.$$

Donc $\boxed{g \text{ est solution de } (E)}$.

b. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' + y = 0$, c'est-à-dire $y' = -y$, sont les fonctions

$$\boxed{x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}}.$$

c. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $g' + g = 2\mathrm{e}^x - x - 1$:

$$y' + y = 2\mathrm{e}^x - x - 1 \iff y' + y = g' + g \iff (y - g)' + (y - g) = 0.$$

Donc y est solution de (E) si et seulement si $y - g$ est solution de $y' + y = 0$, c'est-à-dire $y(x) - g(x) = C\mathrm{e}^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Les solutions de (E) sont les fonctions $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}}$.

Partie B : étude de la fonction g sur $\mathbb{R}$

1) Pour tout réel x :

$$(\mathrm{e}^x - 2)(\mathrm{e}^x + 1) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x - 2 = \boxed{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2}.$$

2) Pour tout réel x, en mettant e^{-x} en facteur (car $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{2x}$ et $1 = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^x$) :

$$g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - 2\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2\right) = \boxed{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x - 2)(\mathrm{e}^x + 1)}.$$

3) *Signe de $g'(x)$.* $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $\mathrm{e}^x + 1 > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^x - 2$. Or

$$\mathrm{e}^x - 2 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 2 \iff x > \ln 2$$ (la fonction $\ln$ est strictement croissante).

Valeur au minimum. $g(\ln 2) = \mathrm{e}^{\ln 2} - \ln 2 + 2\mathrm{e}^{-\ln 2} = 2 - \ln 2 + 2 \times \dfrac{1}{2} = 3 - \ln 2 \approx 2{,}31$.

Limite en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

Limite en $+\infty$. Pour tout réel x, $g(x) = \mathrm{e}^x\left(1 - x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-2x}\right)$. Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$: la parenthèse tend vers 1, donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$\mathrm{e}^x - 2$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	$3 - \ln 2$	↗	$+\infty$

g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\ln 2]$ et strictement croissante sur $[\ln 2\,;+\infty[$, de minimum $\boxed{g(\ln 2) = 3 - \ln 2}$ atteint en $\ln 2$.