Calculatrice autorisée

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

14 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1) **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f.

b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Étudier la convexité de f sur son ensemble de définition.

3) On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - x.$$

a. Déterminer $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c. Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.

d. Montrer que sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec $\alpha \in\,]-1\,;0]$ et β strictement positive.

e. À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $\mathcal{D}$.

f. **i.** On donne la fonction suivante, rédigée en Python, dans laquelle g est la fonction précédente. Faire tourner cette fonction *à la main* en complétant le tableau ci-contre que l'**on recopiera**.

```
def fonction():
    a=2
    b=3
    while b-a>0.1:
        m=(a+b)/2
        if g(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return(a,b)
```

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	2				
b	3				
$b-a$	1				
m	2,5				
$g(m)<0$?	vrai				

ii. Que représentent les deux valeurs affichées en sortie par cet algorithme ?

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.

2) La suite (u_n) est-elle convergente ou divergente ? Justifier la réponse.

3) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

9 points

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième près si besoin.

Au basket-ball, il existe deux sortes de tir :

- les tirs à deux points. Ils sont réalisés près du panier et rapportent deux points s'ils sont réussis ;
- les tirs à trois points. Ils sont réalisés loin du panier et rapportent trois points s'ils sont réussis.

Stéphanie s'entraîne au tir. On dispose des données suivantes :

- un quart de ses tirs sont des tirs à deux points. Parmi eux, $60\,\%$ sont réussis ;
- trois quarts de ses tirs sont des tirs à trois points. Parmi eux, $35\,\%$ sont réussis.

1) Stéphanie réalise un tir. On considère les évènements suivants :
D : « il s'agit d'un tir à deux points » ; R : « le tir est réussi ».

a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b. Calculer la probabilité $P\left(\overline{D} \cap R\right)$.

c. Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir est égale à $0{,}4125$.

d. Stéphanie a réussi un tir. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points.

2) Stéphanie réalise à présent une série de 10 tirs à trois points. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis.
On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir à trois points est égale à $0{,}35$.

a. Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Calculer la probabilité que Stéphanie réussisse exactement 5 tirs. On utilisera de manière détaillée la formule du cours.

d. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate 4 tirs ou plus.

e. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 6 tirs.

f. Stéphanie a réussi au moins 5 tirs. Quelle est la probabilité qu'elle en réussisse moins de 8 ?

3) Soit n un entier naturel non nul. Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points.
On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité qu'elle réussisse un

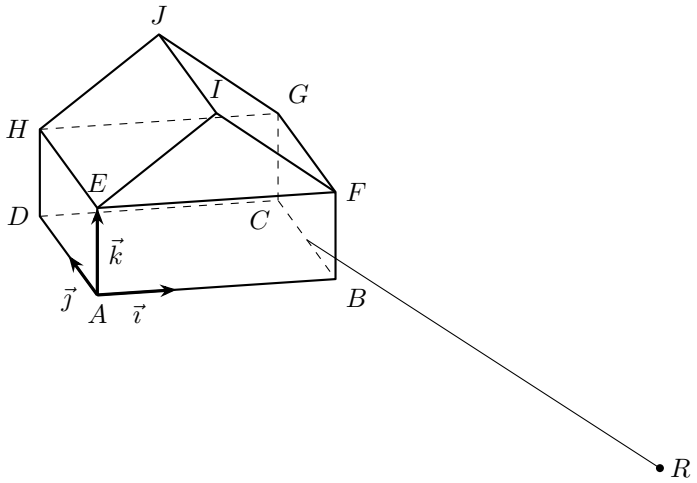
tir à trois points est égale à $0{,}35$.
Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité que Stéphanie réussisse au moins un tir parmi les n tirs soit supérieure ou égale à $0{,}99$.

Exercice 3

7 points

Une maison est constituée d'un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ surmonté d'un prisme $EFIHGJ$ dont une base est le triangle EIF isocèle en I. Cette maison est représentée ci-contre.

On a $AB = 3$, $AD = 2$, $AE = 1$.
On définit les vecteurs $\vec{\imath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$.
On munit ainsi l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.



1) Donner les coordonnées du point G.

2) Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EHI).
Déterminer une équation cartésienne du plan (EHI).

3) Déterminer les coordonnées du point I.

4) Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{EIF}$ au degré près.

5) Afin de raccorder la maison au réseau électrique, on souhaite creuser une tranchée rectiligne depuis un relais électrique situé en contrebas de la maison.
Le relais est représenté par le point R de coordonnées $(6\,;\,-3\,;\,-1)$.
La tranchée est assimilée à un segment d'une droite Δ passant par R et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$. On souhaite vérifier que la tranchée atteindra la maison au niveau de l'arête $[BC]$.

a. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. On admet qu'une équation du plan (BFG) est $x = 3$.
Soit K le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (BFG). Déterminer les coordonnées du point K.

c. Le point K appartient-il bien à l'arête $[BC]$?

Exercice 4

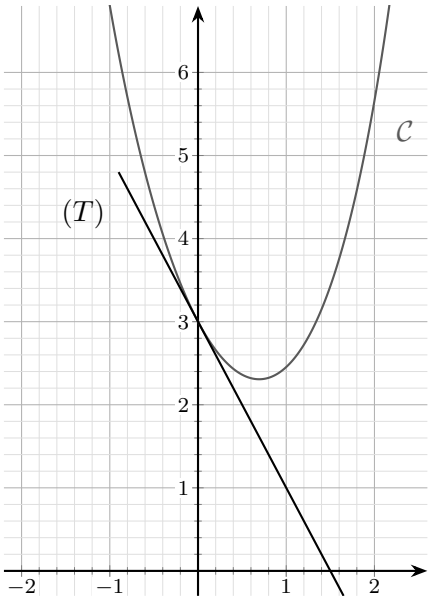
10 points

Partie A : une équation différentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x + ax + b\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.
Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-contre la courbe $\mathcal{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.



1) Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

2) Déterminer alors a et b puis l'expression de $f(x)$.

3) On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' + y = 2\mathrm{e}^x - x - 1.$$

a. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x}$ est solution de l'équation (E).

b. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + y = 0$.

c. En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

Partie B : étude de la fonction g sur $\mathbb{R}$

1) Vérifier que pour tout réel x, on a :

$$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2 = (\mathrm{e}^x - 2)(\mathrm{e}^x + 1).$$

2) En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x.

3) Dresser le tableau de variations **complet** de g sur $\mathbb{R}$.