

Exercice 1 : Automatismes

4 points

Question 1. On calcule d'abord le produit (priorité de la multiplication) :

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1 \times 4}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{4}{6} = \frac{3}{6} - \frac{4}{6} = -\frac{1}{6}.$$

Réponse **b.** : $A = -\frac{1}{6}$.

Question 2. Avec l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$(x - 3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9.$$

Réponse **d.**

Question 3. $f(-1) = -2 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + 1 = -2 \times 1 - 3 + 1 = -4$. Réponse **d.** : l'image de -1 est -4 .

Question 4. Les solutions de $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. La courbe coupe cet axe en $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ et $x = 2$, d'où $S = \{-3; -1; 1; 2\}$. Réponse **c.**

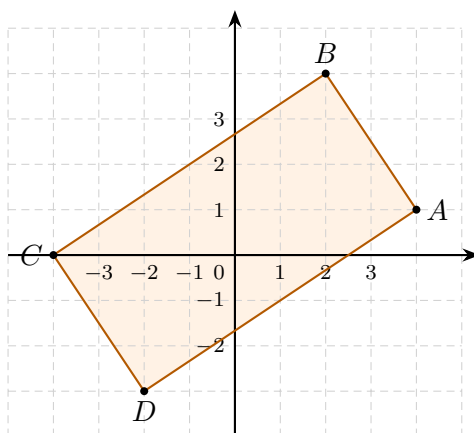
Remarque : la réponse b. donne des intervalles (ensemble des solutions de $f(x) \leq 0$), la réponse d. lit l'ordonnée 1,5 du point d'abscisse 0, ce qui n'a pas de rapport avec l'équation.

Exercice 2

7 points

On rappelle que si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et, dans un repère orthonormé,

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$



1) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - (-3) \\ 3 - 0 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -4 - (-2) \\ 0 - (-3) \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

2) Méthode 1 : les diagonales. Le repère est orthonormé, on peut calculer des longueurs :

$$AC^2 = (-4 - 4)^2 + (0 - 1)^2 = 64 + 1 = 65 \quad BD^2 = (-2 - 2)^2 + (-3 - 4)^2 = 16 + 49 = 65.$$

Donc $AC^2 = BD^2$ et, les longueurs étant positives, $AC = BD = \sqrt{65}$.

Un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur est un rectangle, donc $ABCD$ est un rectangle.

Méthode 2 : un angle droit.

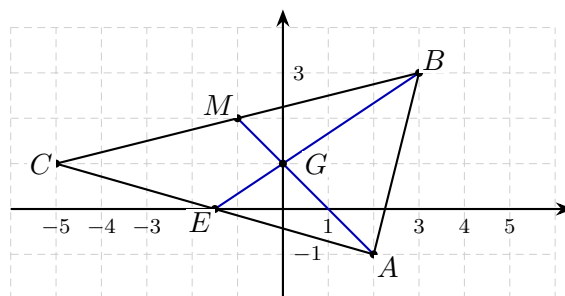
$$BA^2 = (4 - 2)^2 + (1 - 4)^2 = 4 + 9 = 13 \quad BC^2 = (-4 - 2)^2 + (0 - 4)^2 = 36 + 16 = 52 \quad AC^2 = 65.$$

On a $BA^2 + BC^2 = 13 + 52 = 65 = AC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B , donc $\widehat{ABC} = 90^\circ$.

Un parallélogramme qui possède un angle droit est un rectangle : on retrouve que $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 3

9 points



1) M est le milieu de $[BC]$, donc

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 + (-5)}{2} = -1 \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2.$$

Donc $M(-1; 2)$.

2) On note $G(x_G; y_G)$. On a $\overrightarrow{MG} \begin{pmatrix} x_G + 1 \\ y_G - 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ -1 - 2 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc $\frac{1}{3}\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} \iff \begin{cases} x_G + 1 = 1 \\ y_G - 2 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 1 \end{cases}$$

Donc $G(0; 1)$.

3) E est le milieu de $[AC]$, donc

$$x_E = \frac{2 + (-5)}{2} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad y_E = \frac{-1 + 1}{2} = 0.$$

Donc $E \left(-\frac{3}{2}; 0 \right)$.

4) On calcule les coordonnées de deux vecteurs d'origine B :

$$\overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - 3 \\ 0 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ est $\det(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc$. Ici :

$$\det(\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BE}) = (-3) \times (-3) - (-2) \times \left(-\frac{9}{2}\right) = 9 - 9 = 0.$$

Le déterminant est nul, donc les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires (on a d'ailleurs $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$).
Ils ont le point B en commun, donc les points B , G et E sont alignés.

Remarque : G est sur les médianes (AM) et (BE) ; c'est bien le centre de gravité du triangle, et ses coordonnées sont les moyennes de celles des sommets :

$$\left(\frac{2 + 3 - 5}{3}; \frac{-1 + 3 + 1}{3} \right) = (0; 1).$$