

Exercice 1

4 points

L'effectif total est $N = 2 + 0 + 7 + 14 + 11 + 5 + 1 = 40$ candidats.

1) La moyenne pondérée par les effectifs vaut :

$$m = \frac{4 \times 2 + 5 \times 0 + 6 \times 7 + 7 \times 14 + 8 \times 11 + 9 \times 5 + 10 \times 1}{40}$$

$$m = \frac{8 + 0 + 42 + 98 + 88 + 45 + 10}{40} = \frac{291}{40},$$

soit $m = 7,275$ bonnes réponses en moyenne.

2) Les candidats ayant répondu correctement à plus de $m = 7,275$ questions sont ceux qui ont 8, 9 ou 10 bonnes réponses : il y en a $11 + 5 + 1 = 17$.

$$\frac{17}{40} = 0,425 \quad \text{soit} \quad 42,5\% \text{ des candidats.}$$

3) On calcule les effectifs cumulés croissants :

Réponses justes	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	2	0	7	14	11	5	1
Effectif cumulé croissant	2	2	9	23	34	39	40

Éliminer au moins la moitié des candidats, c'est en éliminer au moins $\frac{40}{2} = 20$.

- Si l'on garde les candidats ayant au moins 7 bonnes réponses, on n'élimine que ceux qui en ont 6 ou moins : 9 candidats, ce qui ne suffit pas.
- Si l'on garde les candidats ayant au moins 8 bonnes réponses, on élimine ceux qui en ont 7 ou moins : 23 candidats, et $23 \geq 20$.

La production doit donc fixer le seuil à **8 bonnes réponses** : sont éliminés les candidats ayant 7 bonnes réponses ou moins.

Remarque : la médiane de la série est la moyenne des 20^e et 21^e valeurs, toutes deux égales à 7 ; elle vaut donc 7, et éliminer les candidats ayant au plus la médiane élimine bien au moins la moitié du groupe.

Exercice 2

5 points

1) L'effectif total est $N = 3 + 5 + 11 + 28 + 42 + 32 + 28 + 17 + 4 + 2 + 1 = 173$ ficelles.

$$\bar{x} = \frac{122 \times 3 + 123 \times 5 + 124 \times 11 + \dots + 131 \times 2 + 132 \times 1}{173} = \frac{21\,892}{173} \approx 126,543,$$

soit $\bar{x} \approx 126,54$ g.

L'écart-type est la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{\frac{3(122 - \bar{x})^2 + 5(123 - \bar{x})^2 + \dots + 1(132 - \bar{x})^2}{173}} \approx \sqrt{3,242}.$$

À la calculatrice (mode statistiques), on obtient $\sigma \approx 1,80 \text{ g}$.

2) On calcule les bornes de l'intervalle :

$$\bar{x} - 2\sigma \approx 126,54 - 2 \times 1,80 = 122,94 \quad \text{et} \quad \bar{x} + 2\sigma \approx 126,54 + 2 \times 1,80 = 130,14.$$

Les ficelles dont le poids est à l'extérieur de $[122,94 ; 130,14]$ sont celles de 122 g, de 131 g et de 132 g : il y en a $3 + 2 + 1 = 6$.

$$\frac{6}{173} \approx 0,0347 \quad \text{soit environ} \quad 3,5\% \quad \text{de la production.}$$

Exercice 3

5 points

Rappel : $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc = 0$.

$$1) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 12 - 0 \\ -34 - 2 \end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 12 \\ -36 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -9 - 0 \\ 29 - 2 \end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -9 \\ 27 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 12 \times 27 - (-36) \times (-9) = 324 - 324 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et ont le point A en commun :
les points A , B et C sont alignés.

2) $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x - (-9) \\ 11 - 29 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x + 9 \\ -18 \end{pmatrix}$. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 &\iff 12 \times (-18) - (-36)(x + 9) = 0 \\ &\iff -216 + 36x + 324 = 0 \\ &\iff 36x = -108 \\ &\iff x = -3. \end{aligned}$$

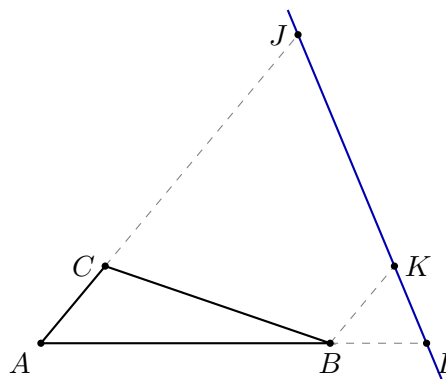
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles pour $x = -3$.

Remarque : comme C appartient à la droite (AB) (question 1), les droites (AB) et (CD) sont alors confondues : $D(-3 ; 11)$ est aligné avec A , B et C .

Exercice 4

6 points

- 1) $3\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$: I est sur la demi-droite $[AB)$, au-delà de B , à un tiers de AB de B .
 J s'obtient en reportant trois fois $\overrightarrow{AC}$ à partir de C et K en reportant $\overrightarrow{AC}$ à partir de B ($ACKB$ est un parallélogramme).



- 2) Avec la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ}.$$

Or $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CJ} = 3\overrightarrow{AC}$, donc

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AC} = \boxed{\frac{4}{3}\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC}}.$$

- 3) De même :

$$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK} = \boxed{\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}}.$$

- 4) On remarque que

$$4\overrightarrow{IK} = 4\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{4}{3}\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IJ}.$$

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{IJ} = 4\overrightarrow{IK}}$: les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires et ont le point I en commun, donc **les points I, J et K sont alignés.**