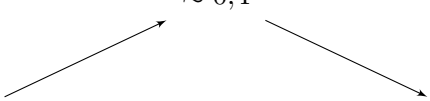


## Exercice 1

6 points

### Partie A

- 1) Par lecture graphique,  $g$  est croissante puis décroissante; son maximum est atteint pour  $x \approx -0,4$  et vaut environ  $0,4$  (lectures approchées).

|        |                                                                                                     |                |           |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-----------|
| $x$    | $-5$                                                                                                | $\approx -0,4$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | $\approx 0,4$<br> |                |           |

Remarque : le calcul (programme de Première) donne un maximum en  $x = -5 + \sqrt{21} \approx -0,42$ , égal à environ  $0,42$ .

- 2) Les solutions de  $g(x) = 0$  sont les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_g$  avec l'axe des abscisses. La courbe coupe cet axe en  $x = -2$  et en  $x = 2$ , donc  $S = \{-2; 2\}$ .

Vérification :  $4 - x^2 = 0 \iff x = -2$  ou  $x = 2$ , et  $2x + 10 \neq 0$  pour ces valeurs.

### Partie B

- 1)  $h$  est affine :  $h(x) = mx + p$ . Son coefficient directeur est

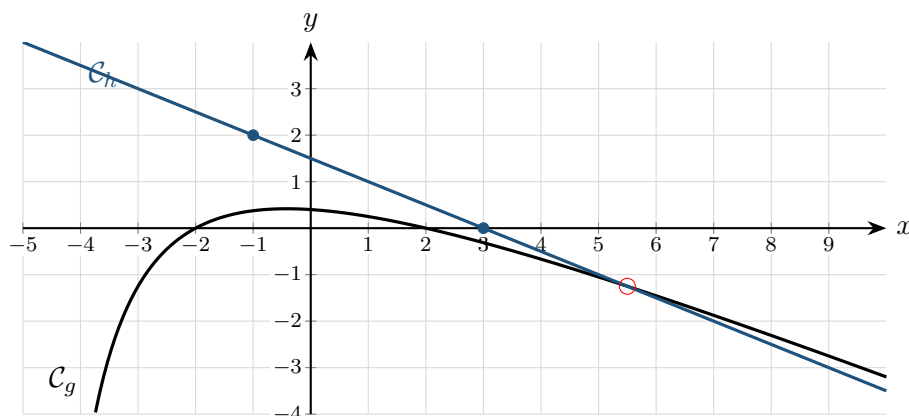
$$m = \frac{h(3) - h(-1)}{3 - (-1)} = \frac{0 - 2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Comme  $h(3) = 0$  :  $-\frac{1}{2} \times 3 + p = 0 \iff p = \frac{3}{2}$ . Donc  $h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ .

- 2) Le coefficient directeur  $m = -\frac{1}{2}$  est strictement négatif, donc :

$h$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$

- 3)  $\mathcal{C}_h$  est la droite passant par les points  $(-1; 2)$  et  $(3; 0)$  (elle coupe l'axe des ordonnées en  $1,5$ ).



### Partie C

- 1) Pour tout  $x \in ]-5; +\infty[$ , on a  $2x + 10 \neq 0$  et, en réduisant au même dénominateur  $2x + 10 = 2(x + 5)$  :

$$\begin{aligned} h(x) - g(x) &= \frac{-x+3}{2} - \frac{4-x^2}{2x+10} = \frac{(-x+3)(x+5)}{2x+10} - \frac{4-x^2}{2x+10} \\ &= \frac{-x^2-5x+3x+15-4+x^2}{2x+10} = \boxed{\frac{11-2x}{2x+10}}. \end{aligned}$$

- 2) Les points d'intersection ont pour abscisses les solutions de  $h(x) = g(x)$ , c'est-à-dire de  $h(x) - g(x) = 0$  :

$$\frac{11-2x}{2x+10} = 0 \iff 11-2x = 0 \iff x = \frac{11}{2} \quad (\text{valeur de } ]-5; +\infty[).$$

Puis  $h\left(\frac{11}{2}\right) = -\frac{11}{4} + \frac{3}{2} = -\frac{5}{4}$ . Il y a un seul point d'intersection :  $\boxed{\left(\frac{11}{2}; -\frac{5}{4}\right)}$ , soit  $(5,5; -1,25)$ .

- 3) a.  $11-2x > 0 \iff x < \frac{11}{2}$ ;  $2x+10 > 0 \iff x > -5$ , donc  $2x+10 > 0$  sur tout l'intervalle.

| $x$                   | $-5$ | $\frac{11}{2}$ | $+\infty$ |
|-----------------------|------|----------------|-----------|
| $11-2x$               | +    | 0              | -         |
| $2x+10$               | +    | +              | +         |
| $\frac{11-2x}{2x+10}$ | +    | 0              | -         |

- b.  $h(x) \geq g(x) \iff h(x) - g(x) \geq 0 \iff \frac{11-2x}{2x+10} \geq 0$ . D'après le tableau :

$$\boxed{S = \left]-5; \frac{11}{2}\right]}$$

Graphiquement, la droite  $C_h$  est au-dessus de  $C_g$  jusqu'au point d'abscisse 5,5.

## Exercice 2

5 points

1)

$$\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} -1 - (-2) \\ 1 - 4 \end{pmatrix} \text{ soit } \boxed{\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}; \quad \overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 5 - (-2) \\ 4 - 4 \end{pmatrix} \text{ soit } \boxed{\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}};$$

$$\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ 4 - 1 \end{pmatrix} \text{ soit } \boxed{\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}}.$$

2) **Point R.**  $\overrightarrow{DR} \begin{pmatrix} x_R + 2 \\ y_R - 4 \end{pmatrix}$  et  $4\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix} : x_R + 2 = 4 \iff x_R = 2$  et  $y_R - 4 = -12 \iff y_R = -8$ .

Donc  $\boxed{R(2; -8)}$ .

**Point S.**  $\frac{1}{2}\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0 \end{pmatrix} : x_S + 2 = 3,5 \iff x_S = 1,5$  et  $y_S - 4 = 0 \iff y_S = 4$ . Donc  $\boxed{S(1,5; 4)}$ .

**Point T.**  $\overrightarrow{ET} \begin{pmatrix} x_T + 1 \\ y_T - 1 \end{pmatrix}$  et  $\frac{1}{3}\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} : x_T + 1 = 2 \iff x_T = 1$  et  $y_T - 1 = 1 \iff y_T = 2$ . Donc  $\boxed{T(1; 2)}$ .

3)  $\overrightarrow{ST} \begin{pmatrix} 1 - 1,5 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{FR} \begin{pmatrix} 2 - 5 \\ -8 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \end{pmatrix}$ .

$$\det(\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{FR}) = (-0,5) \times (-12) - (-2) \times (-3) = 6 - 6 = 0.$$

Les vecteurs sont colinéaires (en effet  $\overrightarrow{FR} = 6\overrightarrow{ST}$ ), donc  $\boxed{(ST) \parallel (FR)}$ .

4)  $x_K = \frac{-2 + 2}{2} = 0$  et  $y_K = \frac{4 + (-8)}{2} = -2$ , donc  $\boxed{K(0; -2)}$ .

5)  $\overrightarrow{SK} \begin{pmatrix} 0 - 1,5 \\ -2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -6 \end{pmatrix}$  et  $\det(\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{SK}) = (-0,5) \times (-6) - (-2) \times (-1,5) = 3 - 3 = 0$ .

Les vecteurs  $\overrightarrow{ST}$  et  $\overrightarrow{SK}$  sont colinéaires ( $\overrightarrow{SK} = 3\overrightarrow{ST}$ ) et ont le point S en commun, donc :

 $\boxed{S, T \text{ et } K \text{ sont alignés}}$ 

## Exercice 3

3 points

1)  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$  :

$$(x - 8)(x + 2) - 4 \times (-4) = 0 \iff x^2 + 2x - 8x - 16 + 16 = 0 \iff x^2 - 6x = 0 \iff x(x - 6) = 0.$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :  $\boxed{x = 0 \text{ ou } x = 6}$ .

Vérification : pour  $x = 6$ ,  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} = 2\vec{u}$ ; pour  $x = 0$ ,  $\vec{u} \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u}$ .

2)  $\|\vec{u}\|^2 = (x - 8)^2 + 4^2 = x^2 - 16x + 64 + 16 = \boxed{x^2 - 16x + 80}$ .

$$3) \|\vec{v}\|^2 = (-4)^2 + (x+2)^2 = 16 + x^2 + 4x + 4 = \boxed{x^2 + 4x + 20}.$$

$$4) \text{ Des normes étant positives, } \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \iff \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 :$$

$$x^2 - 16x + 80 = x^2 + 4x + 20 \iff -20x = -60 \iff x = 3.$$

Les vecteurs ont la même norme pour  $\boxed{x = 3}$ .

Vérification : pour  $x = 3$ ,  $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ , et  $\|\vec{u}\|^2 = 25 + 16 = 41 = 16 + 25 = \|\vec{v}\|^2$ .

## Exercice 4

2 points

On ramène tout dans le membre de gauche puis on factorise par  $(-2x + 4)$  :

$$\begin{aligned} (-2x + 4)^2 &\geq (-2x + 4)(x - 1) \iff (-2x + 4)^2 - (-2x + 4)(x - 1) \geq 0 \\ &\iff (-2x + 4)[(-2x + 4) - (x - 1)] \geq 0 \\ &\iff (-2x + 4)(-3x + 5) \geq 0. \end{aligned}$$

$-2x + 4 = 0 \iff x = 2$  et  $-3x + 5 = 0 \iff x = \frac{5}{3}$ ; les deux expressions sont décroissantes (coefficients négatifs).

| $x$                  | $-\infty$ | $\frac{5}{3}$ | 2 | $+\infty$ |
|----------------------|-----------|---------------|---|-----------|
| $-2x + 4$            | +         | 0             | + | -         |
| $-3x + 5$            | +         | 0             | - | -         |
| $(-2x + 4)(-3x + 5)$ | +         | 0             | - | +         |

$$\boxed{S = \left] -\infty; \frac{5}{3} \right] \cup [2; +\infty[}$$

Attention : on ne divise pas les deux membres par  $-2x + 4$ , dont le signe dépend de  $x$  (et qui peut être nul).

## Exercice 5

4 points

1) a.  $5 < 8 : 2 \times 5 + 1 = \boxed{11 \text{ €}}$ .

b.  $20 \geq 8 : 1,5 \times 20 + 5 = 30 + 5 = \boxed{35 \text{ €}}$ .

2) Si  $0 < x < 8$ , alors  $\boxed{P(x) = 2x + 1}$ ; si  $x \geq 8$ , alors  $\boxed{P(x) = 1,5x + 5}$ .

3) Lignes complétées :

```
1 def prix(x):
2     if x<8:
3         p=2*x+1
4     else:
5         p=1.5*x+5
6     return p
```

4) a. Pour 6 et 7 heures,  $P(x) = 2x + 1$ ; à partir de 8 heures,  $P(x) = 1,5x + 5$ .

| Nombre d'heures de location | 6  | 7  | 8  | 9    | 10 | 15   | 16 | 17   |
|-----------------------------|----|----|----|------|----|------|----|------|
| Prix (en euros)             | 13 | 15 | 17 | 18,5 | 20 | 27,5 | 29 | 30,5 |

b. Le prix augmente avec la durée. Pour  $b = 15$  : 7 heures coûtent 15 € et 8 heures coûtent 17 € > 15 €, donc Étienne peut louer  $\boxed{7 \text{ heures}}$ .

Pour  $b = 28$  : 15 heures coûtent 27,5 € ≤ 28 € et 16 heures coûtent 29 € > 28 €, donc  $\boxed{15 \text{ heures}}$ .

c. On ajoute une heure tant que l'heure suivante reste dans le budget :

```
8 def scooter(b):
9     x=0
10    while prix(x+1)<=b :
11        x=x+1
12    return x
```

Autre réponse correcte : *while*  $\text{prix}(x) \leq b$  à la ligne 10 et *return*  $x-1$  à la ligne 12. On retrouve  $\text{scooter}(15) = 7$  et  $\text{scooter}(28) = 15$ .