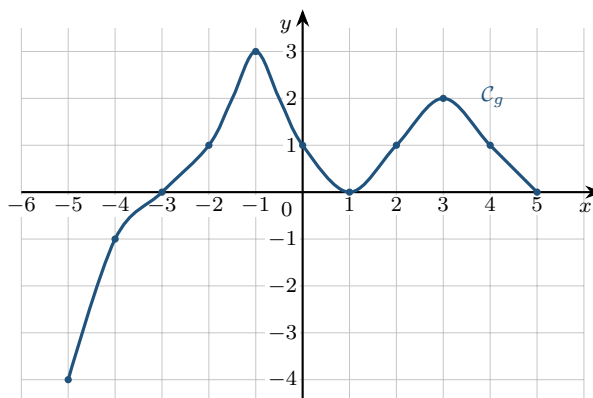


Exercice 1

4 points



1) La courbe est tracée pour les abscisses allant de -5 à 5 (extrémités comprises) : $\mathcal{D}_g = [-5; 5]$.

2) Le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 2 a pour ordonnée 1 : $g(2) = 1$.

3) On cherche les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ d'ordonnée 2 (intersection avec la droite d'équation $y = 2$). Graphiquement, les antécédents de 2 sont

$$x \approx -1,5; \quad x \approx -0,5 \quad \text{et} \quad x = 3.$$

4) Le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 1 a pour ordonnée $g(1) = 0$. Comme $0 \neq 4$, le point $A(1; 4)$ **n'appartient pas** à $\mathcal{C}_g$: $A \notin \mathcal{C}_g$.

5) Les solutions de $g(x) \geq 1$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ situés **sur ou au-dessus** de la droite d'équation $y = 1$. Cette droite coupe la courbe aux abscisses $-2, 0, 2$ et 4 , d'où

$$\mathcal{S} = [-2; 0] \cup [2; 4].$$

6) On cherche les solutions de $g(x) \geq 0$: abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ situés sur ou au-dessus de l'axe des abscisses. La courbe est au-dessous de l'axe pour $x \in [-5; -3[$, et sur ou au-dessus ensuite (elle touche l'axe en 1 et en 5) :

$$\mathcal{E} = [-3; 5].$$

7) Un réel k a pour antécédents les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec la droite d'équation $y = k$. D'après la courbe :

- g est croissante sur $[-5; -1]$ (de -4 à 3), décroissante sur $[-1; 1]$ (de 3 à 0), croissante sur $[1; 3]$ (de 0 à 2) et décroissante sur $[3; 5]$ (de 2 à 0);
- pour $0 < k < 2$, la droite $y = k$ coupe la courbe une fois sur chacun de ces quatre intervalles : 4 antécédents;
- pour $k = 0$: antécédents $-3, 1$ et 5 (3 seulement); pour $k = 2$: $\approx -1,5, \approx -0,5$ et 3 (3 seulement); pour $2 < k < 3$: 2 antécédents; pour $k = 3$ ou $-4 \leq k < 0$: 1 seul.

Donc $\mathcal{F} =]0; 2[$.

Exercice 2

4 points

1) a. $I = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout réel x :

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x).$$

f est impaire : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

b. $I = [-5; 5]$ est symétrique par rapport à 0, mais $g(1) = 1 + 1 + 1 = 3$ et $g(-1) = 1 - 1 + 1 = 1$. Ainsi $g(-1) \neq g(1)$: g n'est pas paire; et $g(-1) \neq -g(1)$: g n'est pas impaire. g n'est **ni paire ni impaire**; on ne peut affirmer aucune de ces deux symétries de la courbe.

c. $I = [-4; 5]$ n'est pas symétrique par rapport à 0 : $5 \in I$ mais $-5 \notin I$. h n'est **ni paire ni impaire**, même si l'expression $2x^3$ vérifie $2(-x)^3 = -2x^3$.

2) $I = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, f étant impaire, $f(-x) = -f(x)$ pour tout réel x . Alors :

$$g(-x) = (2(-x)^2 + 1) \times f(-x) = (2x^2 + 1) \times (-f(x)) = -g(x).$$

Donc g est impaire (courbe symétrique par rapport à l'origine).

Exercice 3

5 points

Affirmation 1 : VRAIE. Avec $-\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}$ et $-2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned} -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} &= 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BC} \\ &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) + 3\overrightarrow{BC} \\ &= 2\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{BC} = \boxed{\overrightarrow{BC}}. \end{aligned}$$

Affirmation 2 : VRAIE. On reconnaît $a^2 - b^2$ avec $a = 2x + 3$ et $b = 2$:

$$(2x + 3)^2 - 4 = (2x + 3 - 2)(2x + 3 + 2) = \boxed{(2x + 1)(2x + 5)}.$$

Affirmation 3 : VRAIE. On factorise par $(x - 1)$:

$$f(x) = (x - 1)[(x - 1) - (2x - 3)] = (x - 1)(-x + 2).$$

Pour $x = 1 + \sqrt{5}$: $x - 1 = \sqrt{5}$ et $-x + 2 = 1 - \sqrt{5}$, donc

$$f(1 + \sqrt{5}) = \sqrt{5}(1 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 5 = \boxed{-5 + \sqrt{5}}.$$

Affirmation 4 : VRAIE. $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (règle du parallélogramme), et O est le milieu de $[AC]$, donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$. Ainsi :

$$2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} = \boxed{2\overrightarrow{AO}}.$$

Exercice 4

4 points

1) Les coefficients multiplicateurs sont 1,2; 1,25 et 1,3. Le coefficient multiplicateur global vaut

$$1,2 \times 1,25 \times 1,3 = 1,95 = 1 + 0,95.$$

Le taux d'évolution global est +95 %.

2) Le coefficient global doit valoir 1 : $1,2 \times \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 1$, soit

$$1 - \frac{x}{100} = \frac{1}{1,2} \iff \frac{x}{100} = 1 - \frac{1}{1,2} = \frac{1}{6} \iff x = \frac{100}{6} \approx \boxed{16,7}.$$

Il faut une réduction d'environ 16,7 %.

3) Une baisse globale de 30 % correspond au coefficient 0,7 :

$$0,85 \times \left(1 - \frac{t}{100}\right) = 0,7 \iff 1 - \frac{t}{100} = \frac{0,7}{0,85} \iff t = 100 \left(1 - \frac{0,7}{0,85}\right) \approx \boxed{17,6}.$$

La seconde baisse est d'environ 17,6 %.

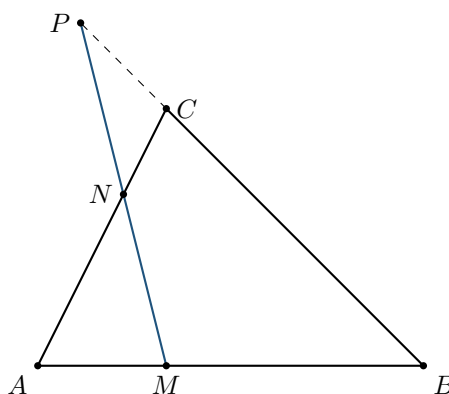
4) Le taux d'évolution global est

$$\frac{2000 - 1500}{1500} = \frac{500}{1500} = \frac{1}{3} \approx 0,333, \text{ soit environ } \boxed{+33,3\%} \text{ en deux ans.}$$

Exercice 5

3 points

1) Figure (exemple) : M au tiers de $[AB]$ en partant de A , N au tiers de $[CA]$ en partant de C , P sur la demi-droite $[BC)$ au-delà de C , avec $CP = \frac{1}{3}BC$.



2) Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \boxed{-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}}.$$

3) $\overrightarrow{NC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (car $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$) et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, donc :

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \boxed{\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}}.$$

Comme $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, on obtient $\overrightarrow{NP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN}$.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP}$ signifie que N est le milieu de $[MP]$: $\boxed{N \text{ est le milieu de } [MP]}$.