

Première partie : Automatismes (QCM)

6 points

Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point.

Question 1 Réponse **A.**

Augmenter de 10 % revient à multiplier par $1 + \frac{10}{100} = 1,1$. Deux augmentations successives : on multiplie par $1,1 \times 1,1 = 1,1^2$ (soit 1,21, une hausse globale de 21 % et non de 20 %).

Question 2 Réponse **C.**

Si p est le prix de départ, $p \times 1,1 = 55$, donc $p = 55 \div 1,1 = 50$ €. Attention : $55 \times 0,9 = 49,5$ € ne convient pas, car une baisse de 10 % ne compense pas une hausse de 10 % (on vérifie : $49,5 \times 1,1 = 54,45 \neq 55$).

Question 3 Réponse **A.**

On prend 50 % de 50 % : $0,5 \times 0,5 = 0,25$, soit 25 % des élèves.

Question 4 Réponse **B.**

Par définition, $4^{-8} = \frac{1}{4^8}$. Les autres propositions ne conviennent pas : $\frac{4^{-12}}{4^4} = 4^{-12-4} = 4^{-16}$; $(8^{-2})^2 = 8^{-4} = 2^{-12}$ alors que $4^{-8} = 2^{-16}$; $\frac{4^{-16}}{4^2} = 4^{-18}$.

Question 5 Réponse **B.**

$$\frac{3}{14} \times \frac{21}{12} = \frac{3 \times 3 \times 7}{2 \times 7 \times 3 \times 4} = \frac{3}{8}.$$

La fraction $\frac{63}{168}$ lui est égale mais n'est pas irréductible (63 et 168 sont divisibles par 21).

Question 6 Réponse **A.**

On compare $\frac{1}{3} = \frac{7}{21}$ et $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$: $\frac{7}{21} > \frac{6}{21}$, la proportion d'internes est plus importante en STI2D A.

Question 7 Réponse **D.**

1 L = 10 dL, donc 75 dL = 7,5 L (= 7 500 mL = 7,5 dm³).

Question 8 Réponse **A.**

L'opposé du carré de x est $-x^2$ et le double de son inverse est $2 \times \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$. La somme s'écrit $x - x^2 + \frac{2}{x}$.

Question 9 Réponse **C.**

On cherche les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ ou la coupe. Les courbes se coupent aux points d'abscisses -1 et 2 ; $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ à gauche de -1 et à droite de 2 . L'inégalité étant large, -1 et 2 sont solutions :

$$S =] - 2,5 ; -1] \cup [2 ; 2,5[.$$

La réponse A oublie les points d'intersection ; la réponse D est une intersection vide.

Question 10 Réponse **A.**

Le point A a pour ordonnée 0 : $3x - 3 = 0 \iff 3x = 3 \iff x = 1$.

Question 11 Réponse **D.**

La fonction s'annule en 6 : seules $x - 6$, $2x - 12$ et $-x + 6$ conviennent ($-x + 12$ s'annule en 12). Elle est positive puis négative : la fonction affine est décroissante, son coefficient directeur est négatif. Il reste $f(x) = -x + 6$.

Question 12 Réponse **C.**

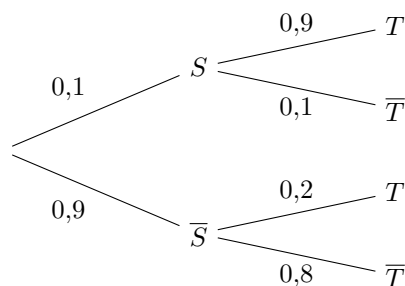
Avec $m > 0$ et $v > 0$:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \iff 2E_c = mv^2 \iff v^2 = \frac{2E_c}{m} \iff v = \sqrt{2\frac{E_c}{m}} \quad (\text{car } v > 0).$$

DEUXIÈME PARTIE (14 points)
Exercice 1
6 points
Partie 1 : étude du test

- 1) a. $P(S) = \frac{1}{10} = 0,1$; $P_S(T) = \frac{9}{10} = 0,9$; $P_{\bar{S}}(\bar{T}) = \frac{4}{5} = 0,8$, donc $P_{\bar{S}}(T) = 1 - 0,8 = 0,2$.

On résume la situation par un arbre pondéré :



- b. $P(S \cap T) = P(S) \times P_S(T) = 0,1 \times 0,9 = 0,09$.

- c. S et $\bar{S}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(S \cap T) + P(\bar{S} \cap T) = 0,09 + 0,9 \times 0,2 = 0,09 + 0,18 = 0,27 = \frac{27}{100}.$$

- 2) On cherche $P_T(S)$:

$$P_T(S) = \frac{P(S \cap T)}{P(T)} = \frac{0,09}{0,27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.$$

Un site dont le test est positif n'est réellement pollué qu'une fois sur trois.

Partie 2 : étude des coûts de dépollution

- 3) a. Le coût vaut 100 € (test positif), 1 000 € (site pollué, test négatif) ou 0 € (site non pollué, test négatif). Les valeurs possibles de X sont $\boxed{0 ; 100 ; 1\,000}$.

- b. $X = 100$ correspond à l'événement $T : P(X = 100) = P(T) = \boxed{0,27}$.
Interprétation : 27 % des sites testés seront dépollués pour un coût de 100 €.

- c. $P(X = 1\,000) = P(S \cap \bar{T}) = 0,1 \times 0,1 = 0,01$ et $P(X = 0) = P(\bar{S} \cap \bar{T}) = 0,9 \times 0,8 = 0,72$.

x_i	0	100	1 000
$P(X = x_i)$	0,72	0,27	0,01

Vérification : $0,72 + 0,27 + 0,01 = 1$.

- d. $E(X) = 0 \times 0,72 + 100 \times 0,27 + 1\,000 \times 0,01 = 0 + 27 + 10 = \boxed{37}$.
Interprétation : sur un grand nombre de sites testés, le coût moyen engagé est d'environ 37 € par site.

Exercice 2

4 points

Partie 1

- 1) a. Le point $A(0 ; -6)$ appartient à $\mathcal{C}_f$, donc $\boxed{f(0) = -6}$.
 $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A , qui passe par $A(0 ; -6)$ et $B(2 ; 4)$:

$$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - (-6)}{2 - 0} = \frac{10}{2} = \boxed{5}.$$

- b. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit $\boxed{y = 5x - 6}$.
Vérification avec B : $5 \times 2 - 6 = 4$.

Partie 2

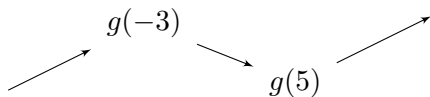
- 2) a. Pour tout $x \in [-5 ; 7]$, $g'(x) = 3x^2 - 3 \times 2x - 45 = 3x^2 - 6x - 45$.
Par ailleurs, $3(x + 3)(x - 5) = 3(x^2 - 5x + 3x - 15) = 3(x^2 - 2x - 15) = 3x^2 - 6x - 45$.
Donc $\boxed{g'(x) = 3(x + 3)(x - 5)}$.

- b. $3 > 0$; $x + 3 > 0 \iff x > -3$; $x - 5 > 0 \iff x > 5$. Tableau de signes :

x	-5	-3	5	7
3	+	+	+	+
$x + 3$	-	0	+	+
$x - 5$	-	-	0	+
$g'(x)$	+	0	-	+

$g'(x) > 0$ sur $[-5 ; -3[$ et sur $]5 ; 7]$; $g'(x) < 0$ sur $] -3 ; 5[$; $g'(-3) = g'(5) = 0$.

c. g est croissante sur $[-5; -3]$, décroissante sur $[-3; 5]$ et croissante sur $[5; 7]$:

x	-5	-3	5	7	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
variations de g					

g admet un maximum local en -3 et un minimum local en 5 .

Exercice 3

4 points

- Affirmation 1 : FAUSSE.** Pour une suite arithmétique, $u_{50} = u_{10} + (50 - 10)r = 12 + 40 \times (-7) = 12 - 280 = \boxed{-268} \neq 292$.
- Affirmation 2 : VRAIE.** $u_{102} = u_{100} + 2r$, donc $20 = 10 + 2r \iff 2r = 10 \iff \boxed{r = 5}$.
- Affirmation 3 : VRAIE.** $f(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 6 = 8 - 8 - 6 + 6 = \boxed{0}$: 2 est bien solution de $f(x) = 0$.
- Affirmation 4 : VRAIE.** Pour tout réel x , $(x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5 = f(x)$. Un carré est positif, donc $(x - 2)^2 + 1 \geq 1 > 0$: $\boxed{f(x) > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$, et f est positive sur $\mathbb{R}$ (ce qui confirme qu'elle n'a pas de racine).