

Exercice 1

3 points

- 1) $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^3 + 1$, $u'(x) = 3x^2$, $v(x) = 3x^2 + 2$, $v'(x) = 6x$ et $v(x) > 0$:

$$f'(x) = \frac{3x^2(3x^2 + 2) - (x^3 + 1) \times 6x}{(3x^2 + 2)^2} = \frac{9x^4 + 6x^2 - 6x^4 - 6x}{(3x^2 + 2)^2} = \frac{3x^4 + 6x^2 - 6x}{(3x^2 + 2)^2}.$$

Réponse **c.**

- 2) $h = u^2$ avec $u(x) = 4x - 2$: $h'(x) = 2u'(x)u(x) = 2 \times 4 \times (4x - 2) = 8(4x - 2)$, donc $h'(1) = 8 \times 2 = 16$. Réponse **d.**

- 3) Pour $x > 0$, $g = uv$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = \sqrt{x}$:

$$g'(x) = 3x^2\sqrt{x} + x^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x^2\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + x^3}{2\sqrt{x}} = \frac{6x^3 + x^3}{2\sqrt{x}} = \frac{7x^3}{2\sqrt{x}}.$$

Réponse **d.**

- 4) $k(0) = -1$; $k'(x) = 3x^2 - 6x + 5$, donc $k'(0) = 5$. La tangente a pour équation $y = k'(0)(x - 0) + k(0)$, soit $y = 5x - 1$. Réponse **a.**

Exercice 2

4 points

- 1) a. $U_0 = 5\,000$ et $U_1 = 5\,000 + 110 = 5\,110$.

b. Chaque année on ajoute 110 € : $U_{n+1} = U_n + 110$. La suite (U_n) est arithmétique de raison 110 et de premier terme $U_0 = 5\,000$, donc pour tout entier naturel n : $U_n = 5\,000 + 110n$.

c. Le 1^{er} janvier 2040 correspond à $n = 2040 - 2019 = 21$: $U_{21} = 5\,000 + 110 \times 21 = 7\,310$ €.

- 2) a. $V_0 = 5\,000$ et $V_1 = 5\,000 \times 1,02 = 5\,100$.

b. Augmenter de 2 % revient à multiplier par 1,02 : $V_{n+1} = 1,02 V_n$. La suite (V_n) est géométrique de raison 1,02 et de premier terme 5 000, donc $V_n = 5\,000 \times 1,02^n$.

c. $V_{21} = 5\,000 \times 1,02^{21} \approx 7\,578,33$ €.

- 3) À la calculatrice (tableau de valeurs) :

n	1	9	10	11	12
U_n	5 110	5 990	6 100	6 210	6 320
V_n	5 100	5 975,46	6 094,97	6 216,87	6 341,21

Pour $1 \leq n \leq 10$, $U_n > V_n$; à partir de $n = 11$, $V_n > U_n$ (l'écart ne fait ensuite que grandir : V_n augmente chaque année de 2 % de $V_n > 5\,500$, donc de plus de 110 €).

Conclusion : si Olivier laisse son argent **10 ans ou moins**, la **proposition 1** est plus intéressante; s'il le laisse **11 ans ou plus**, c'est la **proposition 2**.

4) Lignes complétées :

```

1 def calcul_somme_compte(n):
2     u = 5000
3     v = 5000
4     for i in range(n):
5         u = u + 110
6         v = v * 1.02
7     if u > v:
8         print("La proposition 1 est plus intéressante.")
9     else:
10        print("La proposition 2 est plus intéressante.")

```

Exercice 3

3,5 points

- 1) a. Un point d'intersection vérifie $y = -4$ et $x^2 - 3x + 16 - 4 - 16 = 0$:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \iff (x + 1)(x - 4) = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 4$$

($\Delta = 9 + 16 = 25$, racines $\frac{3 \pm 5}{2}$). Deux points : $(-1; -4)$ et $(4; -4)$.

- b. Le centre est le milieu I de $[AB]$: $I\left(\frac{-8-4}{2}; \frac{6-2}{2}\right) = (-6; 2)$, et le rayon vaut $r = \frac{AB}{2}$ avec $AB^2 = 4^2 + (-8)^2 = 80$, donc $r^2 = \frac{80}{4} = 20$.

Le cercle a pour équation $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = 20$. Sur la droite, $x = 8 - 2y$:

$$\begin{aligned}
 (14 - 2y)^2 + (y - 2)^2 &= 20 \iff 5y^2 - 60y + 180 = 0 \\
 &\iff y^2 - 12y + 36 = 0 \iff (y - 6)^2 = 0 \iff y = 6,
 \end{aligned}$$

d'où $x = 8 - 12 = -4$. Un seul point (la droite est tangente au cercle) : $(-4; 6)$.

- 2) a. On fait apparaître des carrés : $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$ et $y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \iff (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9 + 1 - 5 = 5.$$

L'ensemble est le cercle de centre $(3; -1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

- b. $x^2 - 5x = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$ et $y^2 + y = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$:

$$x^2 + y^2 - 5x + y + 7 = 0 \iff \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{1}{4} - 7 = -\frac{1}{2}.$$

Une somme de carrés ne peut pas être strictement négative : l'ensemble est vide.

Exercice 4

4 points

1) Pour une droite d'équation $ax + by + c = 0$, $\vec{u}(-b; a)$ est directeur et $\vec{n}(a; b)$ est normal. Ici : $\vec{u}(2; 1)$ directeur et $\vec{n}(1; -2)$ normal.

2) La perpendiculaire (Δ) à (d) a pour vecteur normal $\vec{u}(2; 1)$: elle a une équation de la forme $2x + y + c = 0$. Elle passe par $A(6; 2)$: $12 + 2 + c = 0$, soit $c = -14$. $(\Delta) : 2x + y - 14 = 0$.

3) H est l'intersection de (d) et (Δ) :

$$\begin{cases} x - 2y + 8 = 0 \\ 2x + y - 14 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y - 8 \\ 2(2y - 8) + y - 14 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y - 8 \\ 5y = 30 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$H(4; 6).$$

4) Le rayon est AH : $AH^2 = (4 - 6)^2 + (6 - 2)^2 = 4 + 16 = 20$.

$$\mathcal{C} : (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 20.$$

5) $M : (-\frac{1}{2} - 6)^2 + (\frac{1}{2} - 2)^2 = \frac{169}{4} + \frac{9}{4} = \frac{178}{4} = \frac{89}{2} \neq 20$: $M \notin \mathcal{C}$.

$N : (2 - 6)^2 + (4 - 2)^2 = 16 + 4 = 20$: $N \in \mathcal{C}$.

6) Sur l'axe des abscisses, $y = 0$:

$$(x - 6)^2 + 4 = 20 \iff (x - 6)^2 = 16 \iff x - 6 = -4 \text{ ou } x - 6 = 4 \iff x = 2 \text{ ou } x = 10.$$

D'après la figure, D est le plus proche de l'origine : $D(2; 0)$ et $E(10; 0)$.

Exercice 5

2,5 points

1) $r_0 = 7$, $r_1 = 3,5$, $r_2 = 1,75$. La distance est divisée par 2 d'un ricochet au suivant : $r_{n+1} = \frac{1}{2} r_n$. La suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $r_0 = 7$.

2) Pour tout entier naturel n : $r_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3) Jusqu'au 8^e rebond, le caillou parcourt $r_0 + r_1 + \dots + r_7$ (8 termes) :

$$S = r_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8}{1 - \frac{1}{2}} = 7 \times 2 \times \left(1 - \frac{1}{256}\right) = \frac{1785}{128} \approx 13,95 \text{ m}.$$

4) Quel que soit le nombre n de rebonds, la distance totale vaut $14 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 14$ m. Or la rivière mesure 15 m : le caillou ne peut pas atteindre l'autre rive.

Exercice 6

3 points

1) Pour tout réel x : $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

2) $A(1; 1) \in \mathcal{C}_f \iff f(1) = 1 \iff a \times 1^3 + b \times 1^2 + c \times 1 + d = 1 \iff a + b + c + d = 1$.

3) Le coefficient directeur de la tangente en A est $f'(1)$; la droite $y = -2x + 3$ a pour coefficient directeur -2 . Donc $f'(1) = -2$, c'est-à-dire $3a + 2b + c = -2$. $3a + 2b + c = -2$
(On vérifie au passage que cette droite passe bien par A : $-2 \times 1 + 3 = 1$.)

4) $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0 : $f(0) = 2$, or $f(0) = d$, donc $d = 2$.

5) $f'(0) = c$, donc $c = 5$.

6) En remplaçant $c = 5$ et $d = 2$:

$$\begin{cases} a + b + 5 + 2 = 1 \\ 3a + 2b + 5 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = -6 \\ 3a + 2b = -7 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -6 - a \\ 3a - 12 - 2a = -7 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 5 \\ b = -11 \end{cases}$$

Donc $f(x) = 5x^3 - 11x^2 + 5x + 2$.

Vérification : $f(1) = 5 - 11 + 5 + 2 = 1$ et $f'(1) = 15 - 22 + 5 = -2$.