

Exercice 1

7 points

Question 1. Pour tout réel x , $\frac{e^{2x} - 1}{e^x} = \frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{1}{e^x} = e^x - e^{-x}$.

Réponse b

Question 2. $f = uv$ avec $u(t) = 2t + 4$, $u'(t) = 2$, $v(t) = e^{-2t}$, $v'(t) = -2e^{-2t}$. Donc

$$f'(t) = 2e^{-2t} + (2t + 4) \times (-2e^{-2t}) = (2 - 4t - 8)e^{-2t} = (-4t - 6)e^{-2t}.$$

Réponse b

Question 3. $e^{3x+1} = 1 \iff e^{3x+1} = e^0 \iff 3x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{3}$.

Réponse a : $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

Question 4. $e^{-2x+4} \leq 1 \iff e^{-2x+4} \leq e^0 \iff -2x + 4 \leq 0 \iff x \geq 2$ (la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$).

Réponse c : $S = [2; +\infty[$

Question 5. Chaque lancer donne 1, 2 ou 3 : la plus petite somme est $1 + 1 = 2$, la plus grande $3 + 3 = 6$, et toutes les valeurs intermédiaires sont atteintes ($1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, $2 + 3 = 5$).

Réponse c : $X(\Omega) = \{2; 3; 4; 5; 6\}$

Question 6. On distingue les deux boules « 2 » en 2_a et 2_b . Un tirage successif sans remise de deux boules parmi quatre donne $4 \times 3 = 12$ couples équiprobables.

- $Y = 3$: $(1; 2_a), (1; 2_b), (2_a; 1), (2_b; 1)$, soit 4 couples;
- $Y = 4$: $(1; 3), (3; 1), (2_a; 2_b), (2_b; 2_a)$, soit 4 couples;
- $Y = 5$: $(2_a; 3), (2_b; 3), (3; 2_a), (3; 2_b)$, soit 4 couples.

$$\text{Donc } P(Y = 3) = P(Y = 4) = P(Y = 5) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Réponse a

Question 7. $E(Y) = 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4$.

Réponse c : $E(Y) = 4$

Exercice 2

7 points

1) $f = uv$ avec $u(x) = 3x$, $u'(x) = 3$, $v(x) = e^{-0,4x}$, $v'(x) = -0,4e^{-0,4x}$. Pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = 3e^{-0,4x} + 3x \times (-0,4e^{-0,4x}) = (3 - 1,2x)e^{-0,4x},$$

$$f'(x) = (-1,2x + 3)e^{-0,4x}$$

2) a. Pour tout réel x , $e^{-0,4x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $-1,2x + 3$.

$$-1,2x + 3 > 0 \iff -1,2x > -3 \iff x < \frac{3}{1,2} \iff x < 2,5.$$

$$f'(x) > 0 \text{ sur } [0; 2,5[, \quad f'(2,5) = 0, \quad f'(x) < 0 \text{ sur }]2,5; +\infty[$$

b. $f(0) = 0$ et $f(2,5) = 3 \times 2,5 \times e^{-0,4 \times 2,5} = 7,5e^{-1}$.

x	0	2,5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$7,5e^{-1}$	

3) a. $f(0) = 3 \times 0 \times e^0 = 0$: au moment de la prise ($x = 0$), il n'y a aucune trace du produit dans le sang. Le produit n'est donc pas naturellement présent dans l'organisme.

b. $f(5) = 3 \times 5 \times e^{-0,4 \times 5} = 15e^{-2}$.

$$f(5) = 15e^{-2} \approx 2,03 \text{ mg/L}$$

c. D'après le tableau de variations, f atteint son maximum en $x = 2,5$, et ce maximum vaut $f(2,5) = 7,5e^{-1} \approx 2,76$.

Au bout de 2,5 h (2 h 30 min), quantité maximale $7,5e^{-1} \approx 2,76 \text{ mg/L}$

d. Le test est négatif lorsque $f(x) \leq 1,4$.

- Sur $[0; 2,5]$, f est croissante de 0 à $7,5e^{-1} \approx 2,76 > 1,4$: la quantité franchit une seule fois 1,4 mg/L, en un instant α . Avec le tableau de valeurs de la calculatrice : $f(0,59) \approx 1,398 < 1,4$ et $f(0,60) \approx 1,416 > 1,4$, donc $0,59 < \alpha < 0,60$.
- Sur $[2,5; +\infty[$, f est décroissante depuis 2,76 et $f(10) = 30e^{-4} \approx 0,55 < 1,4$: la quantité repasse une seule fois sous 1,4 mg/L, en un instant β . Avec la calculatrice : $f(6,63) \approx 1,402 > 1,4$ et $f(6,64) \approx 1,399 < 1,4$, donc $6,63 < \beta < 6,64$.

Ainsi $f(x) \leq 1,4$ pour $x \leq \alpha$ ou $x \geq \beta$; avec des valeurs arrondies à 10^{-2} qui garantissent un test négatif (soit dans les 35 premières minutes environ, ou à partir de 6 h 38 min environ après la prise) :

test négatif s'il le passe avant 0,59 h environ, ou après 6,64 h environ

Exercice 3

3 points

1) L'assureur encaisse toujours 40 € par contrat :

- sans sinistre, il gagne 40 € ;
- en cas de problème mineur, il gagne $40 - 120 = -80$ € ;
- en cas de problème majeur, il gagne $40 - 1\,020 = -980$ €.

X prend les valeurs -980 , -80 et 40

2) $P(X = -980) = 0,02$, $P(X = -80) = 0,10$ et $P(X = 40) = 1 - 0,10 - 0,02 = 0,88$.

x_i	-980	-80	40
$P(X = x_i)$	$0,02$	$0,10$	$0,88$

3) $E(X) = -980 \times 0,02 + (-80) \times 0,10 + 40 \times 0,88 = -19,6 - 8 + 35,2 = 7,6$.

$$E(X) = 7,6$$

Interprétation : sur un grand nombre de contrats, l'assureur gagne en moyenne 7,60 € par téléviseur assuré et par an.

Exercice 4

3 points

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1} = 2e^{\frac{3}{2}(n+1)} = 2e^{\frac{3}{2}n + \frac{3}{2}} = 2e^{\frac{3}{2}n} \times e^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}} \times p_n.$$

De plus $p_0 = 2e^0 = 2$ (le couple de départ).

(p_n) est géométrique de raison $q = e^{\frac{3}{2}}$ et de premier terme $p_0 = 2$

2) $p_2 = 2e^{\frac{3}{2} \times 2} = 2e^3 \approx 40,2$.

Environ 40 lapins au bout de 2 ans

3) La population est multipliée par 1000 lorsque $p_n \geq 1000 p_0$, c'est-à-dire $e^{\frac{3}{2}n} \geq 1000$. Par tâtonnement à la calculatrice :

n	1	2	3	4	5
$e^{\frac{3}{2}n}$	$\approx 4,5$	$\approx 20,1$	$\approx 90,0$	$\approx 403,4$	$\approx 1\,808$

$$e^{\frac{3}{2} \times 4} < 1000 \text{ et } e^{\frac{3}{2} \times 5} > 1000.$$

Au bout de 5 ans

(on a alors $p_5 = 2e^{7,5} \approx 3\,616$ lapins).

4) $p_{10} = 2e^{15} \approx 6\,538\,035$: le modèle prévoit environ 6,5 millions de lapins au bout de 10 ans. Une île a des ressources (nourriture, espace) limitées, qui freinent la croissance bien avant d'atteindre un tel effectif. Le modèle n'est pas réaliste à 10 ans : une croissance exponentielle ne peut décrire la population que sur une courte durée.