

Calculatrice autorisée

Exercice 1

7 points

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Question 1. Pour tout réel x , le nombre $e^x - e^{-x}$ est égal à :

- a. 1 b. $\frac{e^{2x} - 1}{e^x}$ c. $(1 - e^{2x})e^x$ d. $\frac{e^x}{e^{-x}}$

Question 2. Soit f la fonction définie pour tout réel t par $f(t) = (2t + 4)e^{-2t}$. Alors :

- a. $f'(t) = -4e^{-2t}$ b. $f'(t) = (-4t - 6)e^{-2t}$
c. $f'(t) = (-4t + 6)e^{-2t}$ d. $f'(t) = (4t - 6)e^{-2t}$

Question 3. L'équation $e^{3x+1} = 1$ a pour ensemble de solutions :

- a. $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ b. $S = \{0\}$ c. $S = \{1\}$ d. $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

Question 4. L'inéquation $e^{-2x+4} \leq 1$ a pour ensemble de solutions :

- a. $] - \infty ; 2]$ b. $] - \infty ; 2[$ c. $[2 ; +\infty[$ d. $]2 ; +\infty[$

Question 5. On lance deux fois un dé équilibré à quatre faces numérotées 1, 1, 2 et 3, et on note X la somme des numéros obtenus sur la face du dessus. L'ensemble des valeurs prises par X est :

- a. $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ b. $\{3; 4; 5\}$ c. $\{2; 3; 4; 5; 6\}$ d. $\{1; 2; 3\}$

Question 6. On dispose d'une urne contenant quatre boules numérotées 1, 2, 2 et 3. On tire successivement et sans remise deux boules de cette urne. On note Y la somme des deux numéros obtenus. La loi de probabilité de Y est :

- a.

y_i	3	4	5
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
- b.

y_i	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$
- c.

y_i	3	4	5
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
- d.

y_i	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Question 7. En reprenant le contexte de la question 6, l'espérance de Y est égale à :

- a. $E(Y) = 2$ b. $E(Y) = 3,2$ c. $E(Y) = 4$ d. $E(Y) = 4,6$

Exercice 2

7 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = 3xe^{-0,4x}$. La fonction dérivée de la fonction f est notée f' .

- 1) Montrer que la fonction f' a pour expression $f'(x) = (-1,2x + 3)e^{-0,4x}$.
- 2)
 - a. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 - b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- 3) Un sportif a pris un produit dopant. La fonction f modélise la quantité, en mg/L, de ce produit dopant présent dans le sang du sportif x heures après la prise.
 - a. Pourquoi peut-on affirmer que ce produit dopant n'est pas naturellement présent dans l'organisme du sportif ?
 - b. Déterminer la quantité de produit présent dans l'organisme du sportif au bout de 5 h (donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie au centième).
 - c. Combien de temps après son absorption ce produit dopant sera-t-il présent en quantité maximale dans le sang du sportif ? Quelle est alors cette quantité ?
 - d. Le sportif absorbe ce produit dopant au début d'une séance d'entraînement. Le même jour, il est soumis à un contrôle antidopage. Celui-ci se révélera positif si la quantité de produit dopant présent dans l'organisme du sportif dépasse 1,4 mg/L. À quel(s) moment(s) doit-il passer le test pour que celui-ci se révèle négatif ? *Les résultats seront arrondis à 10^{-2} .*

Exercice 3

3 points

Une société assure annuellement les téléviseurs d'une chaîne hôtelière de luxe. Chaque téléviseur est assuré pour 40 €. Le risque qu'un problème mineur survienne dans l'année est de 10 %. Le coût du sinistre pour l'assureur est alors de 120 € (en moyenne). Le risque qu'un problème majeur survienne dans l'année est de 2 %. Le coût du sinistre pour l'assureur est alors de 1 020 € (en moyenne). Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique annuel de l'assureur par contrat pour un téléviseur.

- 1) Quelles sont les valeurs prises par X ?
- 2) Donner la loi de probabilité de X .
- 3) Calculer l'espérance de X . **Interpréter ce résultat.**

Exercice 4

3 points

Un couple de lapins est introduit dans une île qui ne contient pas de prédateurs. L'accroissement de la population de lapins d'une année à l'autre est alors proportionnel à l'effectif de cette population.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle p_n la population de lapins à l'année n . On peut alors établir que : $p_n = 2e^{\frac{3}{2}n}$.

- 1) Montrer que (p_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
- 2) Donner une estimation de la population de lapins au bout de 2 ans.
- 3) Au bout de combien d'années la population de lapins aura-t-elle été multipliée par 1 000 ? On pourra utiliser un raisonnement par tâtonnement.
- 4) Ce modèle est-il réaliste pour estimer la population de lapins au bout de 10 ans ?