

Exercice 1

5 points

- 1) a. I est associé au réel 0 et M au réel x sur le cercle trigonométrique, donc

$$I(1; 0) \quad \text{et} \quad M(\cos(x); \sin(x)).$$

- b. Dans le repère orthonormé :

$$IM^2 = (\cos(x) - 1)^2 + (\sin(x) - 0)^2 = \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 + \sin^2(x).$$

Comme $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on obtient $IM^2 = 2 - 2\cos(x) = 2(1 - \cos(x))$, avec $1 - \cos(x) \geq 0$. Une distance étant positive :

$$IM = \sqrt{2} \times \sqrt{1 - \cos(x)}.$$

- 2) a. $OI = OM = 1$ (rayons du cercle trigonométrique) : le triangle IMO est isocèle en O .

- b. Dans le triangle IMO isocèle en O , la hauteur issue du sommet principal O est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{IOM}$ (c'est l'axe de symétrie du triangle). Or $\widehat{IOM} = x$ puisque M est associé au réel $x \in]0; \pi[$. Donc

$$\widehat{HOM} = \frac{x}{2}.$$

- c. Le triangle MHO est rectangle en H , d'hypoténuse $OM = 1$:

$$\sin(\widehat{HOM}) = \frac{MH}{OM} \iff \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{MH}{1} \iff MH = \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

- 3) La hauteur issue de O dans le triangle isocèle IMO est aussi la médiane : H est le milieu de $[IM]$, donc $MH = \frac{IM}{2}$. D'après 1)b. et 2)c. :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{1 - \cos(x)}}{2} = \frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{\sqrt{2}}, \quad \text{soit} \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}.$$

- 4) Pour tout réel θ , $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$. Avec $\theta = \frac{x}{2}$ et la question 3) :

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{1 - \cos(x)}{2} = \frac{1 + \cos(x)}{2}.$$

Or $x \in]0; \pi[$, donc $\frac{x}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et $\cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$. On en déduit

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}.$$

Exercice 2

5 points

- 1) Le ballon est lancé à l'abscisse $x = 0$:

$$f(0) = -0,3 \times 0^2 + 1,6 \times 0 + 2 = 2.$$

Le ballon est lancé d'une hauteur de 2 m.

- 2) Le panier se trouve à l'abscisse $x = 4,6$:

$$f(4,6) = -0,3 \times 21,16 + 1,6 \times 4,6 + 2 = -6,348 + 7,36 + 2 = 3,012.$$

Le panier est à une hauteur d'environ 3,01 m.

- 3) a. On factorise par $a = -0,3 = -\frac{3}{10}$ les termes en x : $\frac{1,6}{-0,3} = -\frac{16}{3}$, donc

$$f(x) = -\frac{3}{10} \left(x^2 - \frac{16}{3}x \right) + 2 = -\frac{3}{10} \left[\left(x - \frac{8}{3} \right)^2 - \frac{64}{9} \right] + 2 = -\frac{3}{10} \left(x - \frac{8}{3} \right)^2 + \frac{64}{30} + 2.$$

Comme $\frac{64}{30} + 2 = \frac{32}{15} + \frac{30}{15} = \frac{62}{15}$:

$$f(x) = -0,3 \left(x - \frac{8}{3} \right)^2 + \frac{62}{15}.$$

(Contrôle : $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1,6}{-0,6} = \frac{8}{3}$.)

- b. Pour tout réel $x \geq 0$, $\left(x - \frac{8}{3} \right)^2 \geq 0$ et $-0,3 < 0$, donc $f(x) \leq \frac{62}{15}$, avec égalité pour $x = \frac{8}{3}$.

Le maximum de f est $\frac{62}{15}$; comme $62 = 4 \times 15 + 2$, $\frac{62}{15} = 4 + \frac{2}{15} = 4,133 \dots$

La hauteur maximale atteinte par le ballon est d'environ 4,13 m.

Exercice 3

5 points

- 1) Identité remarquable : $(\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1) = \cos^2(x) - 1$. Or $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc $\cos^2(x) - 1 = -\sin^2(x)$. Réponse b.

- 2) Deux réels sont associés au même point si et seulement si leur différence est un multiple de 2π .

- $-\frac{11\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{14\pi}{4} = -\frac{7\pi}{2}$: pas un multiple de 2π ;
- $-\frac{33\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{36\pi}{4} = -9\pi$: pas un multiple de 2π (9 est impair) ;
- $\frac{27\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} = 6\pi = 3 \times 2\pi$.

Réponse c.

3) La parabole est en dessous de la droite lorsque

$$2x^2 + 7x - 4 \leq 3x + 2 \iff 2x^2 + 4x - 6 \leq 0 \iff x^2 + 2x - 3 \leq 0.$$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$, racines $x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$. Le trinôme est du signe de $a = 1 > 0$ sauf entre les racines : il est négatif ou nul sur $[-3; 1]$. Réponse **a**.

4) D'après la formule d'Al-Kashi écrite avec le produit scalaire, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \vec{AB} \cdot \vec{AC}$, donc

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{9 + 36 - 25}{2} = 10. \quad \text{Réponse } \mathbf{c}.$$

5) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 2 \times 6 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$. Réponse **a**.

Exercice 4

5 points

1) $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dans le repère orthonormé :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 3 + (-1) \times 1 = \boxed{11}.$$

2) $AB = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{17}}$.

3) a. H est le projeté orthogonal de C sur (AB) , donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$. Comme ce produit scalaire est positif ($11 > 0$), $\vec{AH}$ et $\vec{AB}$ sont de même sens, et $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = AB \times AH$. Ainsi

$$AB \times AH = 11 \iff AH = \frac{11}{AB} = \frac{11}{\sqrt{17}} = \frac{11\sqrt{17}}{17}.$$

Comme $AB = \sqrt{17}$, on obtient $\boxed{AH = \frac{11}{17} \times AB}$.

b. Les vecteurs $\vec{AH}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires ($H \in (AB)$), de même sens (question a.) et $AH = \frac{11}{17}AB$. Donc $\boxed{\vec{AH} = \frac{11}{17} \vec{AB}}$.

c. En notant $H(x_H; y_H)$:

$$\begin{cases} x_H + 1 = \frac{11}{17} \times 4 \\ y_H - 1 = \frac{11}{17} \times (-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x_H = \frac{44}{17} - 1 = \frac{27}{17} \\ y_H = 1 - \frac{11}{17} = \frac{6}{17} \end{cases}$$

Donc $\boxed{H\left(\frac{27}{17}; \frac{6}{17}\right)}$. Vérification : $\vec{CH} \left(-\frac{7}{17}; -\frac{28}{17}\right)$ et $\vec{CH} \cdot \vec{AB} = -\frac{28}{17} + \frac{28}{17} = 0$.