

Exercice 1

6 points

- 1) Les points H et E sont sur le segment $[BC]$, donc $x = HE$ est compris entre 0 et $BC = 12$. Pour que le rectangle ne soit pas aplati, il faut $x \neq 0$ et $x \neq 12$:

$$\mathcal{D}_s =]0; 12[$$

(on accepte aussi $[0; 12]$ en considérant les rectangles aplatis, d'aire nulle).

- 2) a. Le triangle ABC est isocèle en A et O est le milieu de $[BC]$, donc $OC = \frac{12}{2} = 6$. Le triangle AOC est rectangle en O ; d'après le théorème de Pythagore :

$$AO^2 = AC^2 - OC^2 = 100 - 36 = 64, \quad \text{donc } \boxed{AO = 8 \text{ cm}}.$$

- b. $BH + HE + EC = BC$ et $BH = CE$, donc $2CE + x = 12$, d'où

$$\boxed{CE = 6 - \frac{x}{2}}.$$

- c. $EFGH$ est un rectangle, donc $(EF) \perp (HE)$, c'est-à-dire $(EF) \perp (BC)$. La droite (AO) est la hauteur issue de A , donc $(AO) \perp (BC)$.

Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles : $\boxed{(EF) \parallel (AO)}$.

- d. Dans le triangle AOC : $E \in [OC]$, $F \in [AC]$ et $(EF) \parallel (AO)$. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CE}{CO} = \frac{CF}{CA} = \frac{EF}{OA}, \quad \text{donc } EF = OA \times \frac{CE}{CO} = 8 \times \frac{6 - \frac{x}{2}}{6} = 8 - \frac{8x}{12},$$

soit

$$\boxed{EF = 8 - \frac{2}{3}x}.$$

- e. L'aire du rectangle est $s(x) = HE \times EF = x \left(8 - \frac{2}{3}x \right)$, donc

$$\boxed{s(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 8x}.$$

- 3) $3 \in \mathcal{D}_s$ et $s(3) = -\frac{2}{3} \times 9 + 8 \times 3 = -6 + 24 = 18$.

Donc $\boxed{M(3; 18) \text{ appartient à la courbe de } s}$.

- 4) a. D'après la question 2), $s(x) = x \left(8 - \frac{2}{3}x \right)$. Or $8 - \frac{2}{3}x = -\frac{2}{3}(x - 12)$, donc

$$\boxed{s(x) = -\frac{2}{3}x(x - 12)}.$$

- b. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $s(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 12$.

Les racines de s sont $\boxed{0 \text{ et } 12}$.

- 5) a. s est un polynôme du second degré avec $a = -\frac{2}{3} < 0$: sa parabole est tournée vers le bas

et s atteint son maximum au sommet, dont l'abscisse est la moyenne des racines :

$$\alpha = \frac{0 + 12}{2} = 6, \quad s(6) = -\frac{2}{3} \times 36 + 8 \times 6 = -24 + 48 = 24.$$

L'aire maximale du rectangle est 24 cm^2 , atteinte pour $x = 6$.

- b. Comme $a < 0$, s est croissante puis décroissante, avec un changement en $\alpha = 6$ (les valeurs 0 aux bornes ne sont pas atteintes sur $]0; 12[$) :

x	0	6	12
$s(x)$	0	24	0

6) On résout $s(x) > 16$ sur $]0; 12[$:

$$-\frac{2}{3}x^2 + 8x > 16 \iff -\frac{2}{3}x^2 + 8x - 16 > 0 \iff x^2 - 12x + 24 < 0 \quad (\text{on multiplie par } -\frac{3}{2} < 0).$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 24 = 144 - 96 = 48 > 0 \text{ et } \sqrt{48} = 4\sqrt{3}, \text{ d'où deux racines :}$$

$$x_1 = \frac{12 - 4\sqrt{3}}{2} = 6 - 2\sqrt{3}, \quad x_2 = 6 + 2\sqrt{3}.$$

Le trinôme $x^2 - 12x + 24$ (coefficient 1 > 0) est strictement négatif entre ses racines. De plus $2\sqrt{3} = \sqrt{12} < 6$, donc ces racines sont dans $]0; 12[$.

L'aire est supérieure à 16 cm^2 pour $x \in]6 - 2\sqrt{3}; 6 + 2\sqrt{3}[$ (environ entre 2,54 et 9,46).

Exercice 2

4 points

$f(x) = 2x^2 + bx + 3$ est un trinôme avec $a = 2$, $c = 3$ et discriminant

$$\Delta = b^2 - 4 \times 2 \times 3 = b^2 - 24.$$

On note que $b^2 - 24 = (b - 2\sqrt{6})(b + 2\sqrt{6})$, car $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

- 1) f admet une racine unique $\iff \Delta = 0 \iff b^2 = 24 \iff b = 2\sqrt{6}$ ou $b = -2\sqrt{6}$. La racine est alors $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{4}$:

• si $b = 2\sqrt{6}$: $x_0 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$;

• si $b = -2\sqrt{6}$: $x_0 = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

- 2) f admet deux racines distinctes $\iff \Delta > 0 \iff b^2 > 24 \iff b < -2\sqrt{6}$ ou $b > 2\sqrt{6}$.

Signe des racines. Pour un trinôme à deux racines x_1 et x_2 : $x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2} > 0$ et $x_1 + x_2 =$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{b}{2}.$$

Le produit est positif : les deux racines sont **de même signe**, celui de leur somme.

- Si $b > 2\sqrt{6}$: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{2} < 0$, donc les deux racines sont strictement négatives.
- Si $b < -2\sqrt{6}$: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{2} > 0$, donc les deux racines sont strictement positives.

$$3) f \text{ n'admet pas de racine réelle} \iff \Delta < 0 \iff b^2 < 24 \iff -2\sqrt{6} < b < 2\sqrt{6}.$$

Exercice 3

5 points

Chaque réponse justifiée rapporte 0,5 point.

- 1) Pour tout réel x , $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ (formule du cours, lisible sur le cercle trigonométrique : un quart de tour dans le sens direct envoie le point de coordonnées $(\cos x; \sin x)$ sur le point $(-\sin x; \cos x)$). Réponse d.
- 2) Le symétrique de $M(\cos x; \sin x)$ par rapport à O est $M'(-\cos x; -\sin x)$. Or $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$: un demi-tour supplémentaire. En revanche $-\pi - x$ donne le point $(-\cos x; \sin x)$, symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées. Réponse b.
- 3) $\cos(-x) = \cos(x)$ pour tout réel x (la fonction cosinus est paire). Les autres sont fausses : $\cos(0 + \pi) = -1 \neq \cos 0$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq \sin \frac{\pi}{2}$; $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Réponse c.
- 4) $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et $f(-x) = \sin(-x)\cos(-x) = -\sin(x)\cos(x) = -f(x)$. Réponse b : impaire.
- 5) $g(-x) = \sin(-x) - (-x) = -\sin(x) + x = -(\sin(x) - x) = -g(x)$. Réponse b : impaire.
- 6) Pour tout réel x , $\cos(x) + 2 \geq 1 > 0$, donc h est bien définie sur $\mathbb{R}$, et $h(-x) = \frac{1}{\cos(-x) + 2} = \frac{1}{\cos(x) + 2} = h(x)$. Réponse a : paire.
- 7) Sur $]-\pi; \pi]$, $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ a deux solutions, symétriques par rapport à l'axe des abscisses sur le cercle : $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{4}$ (et $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$). Réponse c.
- 8) $\cos(x) = 0$ pour les points J et J' du cercle, soit sur $[-\pi; \pi[$: $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$. Réponse b : deux solutions.
- 9) Contre-exemple : $a = \pi$ donne $\sin(\pi) = 0$ mais $\cos(\pi) = -1 \neq 1$. Réponse b : fausse.
- 10) La courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère (par exemple, au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ correspond le point d'ordonnée opposée en $-\frac{\pi}{4}$); elle n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Réponse b : impaire.

Exercice 4

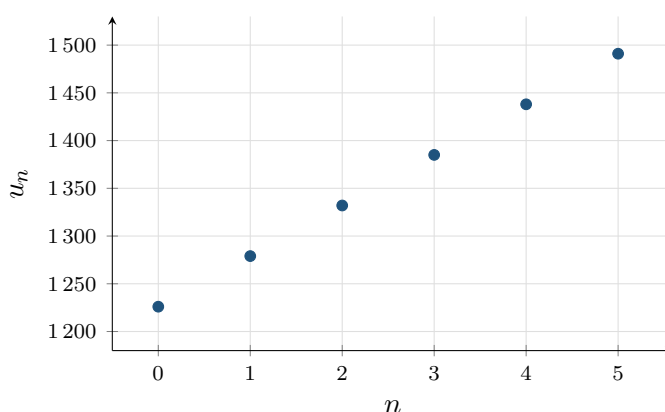
5 points

1) $u_1 - u_0 = 1279 - 1226 = 53$, $u_2 - u_1 = 1332 - 1279 = 53$, $u_3 - u_2 = 1385 - 1332 = 53$.

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours 53 : ces nombres sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison $r = 53$.

2) En 2019 : $u_4 = u_3 + 53 = 1385 + 53 = \text{1438 visiteurs}$; en 2020 : $u_5 = 1438 + 53 = \text{1491 visiteurs}$.

3) Les points sont alignés (suite arithmétique) :



4) Le nombre de visiteurs augmente de 53 chaque année : pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 53$.

5) On part de $u_0 = 1226$ et la boucle ajoute n fois la raison 53 :

```
def suite(n):
    u = 1226
    for k in range(n):
        u = u + 53
    return u
```

6) (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 1226$ et de raison 53, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1226 + 53n$.

7) $u_{11} = 1226 + 53 \times 11 = 1226 + 583 = \text{1809}$.

8) On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 2000$:

$$1226 + 53n > 2000 \iff 53n > 774 \iff n > \frac{774}{53}.$$

Or $53 \times 14 = 742 < 774$ et $53 \times 15 = 795 > 774$, donc $n \geq 15$. Vérification : $u_{14} = 1968$ et $u_{15} = 2021$.

Le nombre de visiteurs dépassera 2 000 à partir de l'année 2015 + 15, soit 2030.

9) De 2015 à 2023 inclus, on additionne $u_0, u_1, \dots, u_8$, soit 9 termes, avec $u_8 = 1226 + 53 \times 8 = 1650$:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_8 = 9 \times \frac{u_0 + u_8}{2} = 9 \times \frac{1226 + 1650}{2} = 9 \times 1438 = \text{12 942 visiteurs}.$$