

Calculatrice autorisée

Exercice 1

6 points

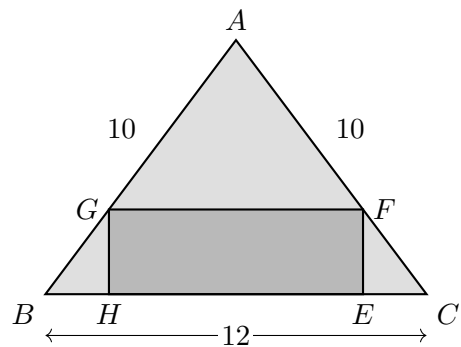
Les questions de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées, si nécessaire, en admettant les résultats des questions précédentes.

Grâce à un logiciel de géométrie dynamique, on a construit la figure ci-contre.

ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = AC = 10$ cm et $BC = 12$ cm.

$EFGH$ est un rectangle inscrit dans le triangle ABC de sorte que $CE = BH$.

On note x la longueur HE en cm et $s(x)$ l'aire du rectangle $EFGH$ en cm^2 .



- 1) En vous aidant de la figure, déterminer l'ensemble de définition de s .

On cherche maintenant à déterminer l'expression de $s(x)$ en fonction de x . On note O le pied de la hauteur issue de A et on admet que $BO = OC$.

- 2)
 - a. Déterminer la longueur AO .
 - b. Déterminer CE en fonction de x .
 - c. Justifier que les droites (EF) et (AO) sont parallèles.
 - d. En utilisant le théorème de Thalès, déterminer EF en fonction de x .
 - e. En déduire que $s(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 8x$.
- 3) Le point $M(3; 18)$ appartient-il à la courbe représentative de s ? Justifier la réponse.
- 4)
 - a. Déduire de la question 2) la forme factorisée de $s(x)$.
 - b. En déduire les racines de s .
- 5)
 - a. Quelle est l'aire maximale du rectangle $EFGH$? En quelle valeur de x est-elle atteinte?
 - b. En déduire le tableau de variations de s .
- 6) Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle $EFGH$ est-elle supérieure à 16 cm^2 ?

Exercice 2

4 points

Soit $f(x) = 2x^2 + bx + 3$ avec $b \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de b pour lesquelles :

- 1) f admet une racine unique. Calculer alors cette racine.
- 2) f admet deux racines distinctes. Discuter alors du signe de ces racines.
- 3) f n'admet pas de racine réelle.

Exercice 3

5 points

QCM : pour chaque question, une seule réponse est correcte. Une justification soignée devra être apportée pour chacune des questions.

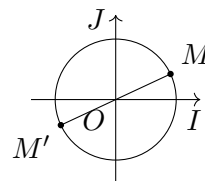
1) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ est égal à :

- a. $\cos(x) - \sin(x)$ b. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ c. $\sin(x)$ d. $-\sin(x)$

2) Soit x un réel strictement positif et M le point du cercle trigonométrique associé à ce réel.

Le point M' , symétrique de M par rapport à O , est associé au réel :

- a. $-x$ b. $\pi + x$ c. $-\pi - x$ d. $\pi - x$



3) Parmi les égalités suivantes, laquelle est vraie pour tout réel x ?

- a. $\cos(x + \pi) = \cos(x)$ b. $\sin(-x) = \sin(x)$
c. $\cos(-x) = \cos(x)$ d. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 2$

4) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) \cos(x)$ est :

- a. paire b. impaire c. ni paire ni impaire

5) La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin(x) - x$ est :

- a. paire b. impaire c. ni paire ni impaire

6) La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{\cos(x) + 2}$ est :

- a. paire b. impaire c. ni paire ni impaire

7) On sait que $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in]-\pi; \pi]$. Alors $x = \dots$

- a. $-\frac{\pi}{4}$ b. $\frac{\pi}{4}$ c. $-\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{4}$ d. $\frac{3\pi}{4}$

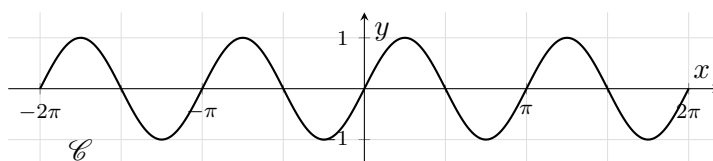
8) Sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, l'équation $\cos(x) = 0$ admet exactement :

- a. une solution b. deux solutions c. aucune solution

9) L'affirmation « si $\sin(a) = 0$, alors $\cos(a) = 1$ » est :

- a. vraie b. fausse

10) Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f sur $[-2\pi; 2\pi]$, tracée ci-dessous. La fonction représentée est :



- a. paire b. impaire c. ni paire ni impaire

Exercice 4

5 points

Le gérant d'un parc d'attractions note chaque année le nombre de visiteurs de son parc. Voici les résultats obtenus :

Année	2015	2016	2017	2018
Nombre de visiteurs	1 226	1 279	1 332	1 385

Soit (u_n) la suite telle que u_n représente le nombre de visiteurs du parc l'année $(2015 + n)$. Ainsi, $u_0 = 1\,226$, $u_1 = 1\,279$, etc.

- 1) Les nombres u_0 , u_1 , u_2 et u_3 forment-ils une suite arithmétique ? Quelle en serait la raison ? Justifier.

Le gérant du parc veut prévoir des installations supplémentaires pour répondre à la demande croissante du nombre de visiteurs. Il estime que le nombre de visiteurs va augmenter de 53 tous les ans.

- 2) Dans ces conditions, si son estimation s'avère correcte, calculer le nombre de visiteurs du parc en 2019, puis en 2020.
- 3) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.
- 4) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- 5) On souhaite automatiser le calcul des termes de la suite (u_n) au moyen d'une fonction écrite en Python. Compléter la fonction `suite` ci-dessous, qui prend en paramètre d'entrée l'entier n correspondant au rang du terme à calculer et qui renvoie ce terme.

```
def suite(n):
    u = ...
    for k in range(...):
        u = ...
    return ...
```

- 6) Exprimer u_n en fonction de n .
- 7) En déduire la valeur de u_{11} .
- 8) Si les prévisions de croissance se confirment, à partir de quelle année le nombre de visiteurs dépassera-t-il 2 000 ?
- 9) Calculer le nombre total de visiteurs depuis 2015 jusqu'en 2023 inclus.