

Première partie : Automatismes (QCM)

6 points

Question 1 Réponse **B.**

On réduit au même dénominateur $4x$:

$$\frac{1}{4} - \frac{2x+2}{x} = \frac{x}{4x} - \frac{4(2x+2)}{4x} = \frac{x-8x-8}{4x} = \frac{-7x-8}{4x} = \boxed{-\frac{7x+8}{4x}}.$$

Question 2 Réponse **C.**

$$cd = (-6) \times \left(-\frac{1}{6}\right) = 1, \text{ donc } \frac{b}{cd} = \frac{6}{1} = 6 \text{ et}$$

$$F = \frac{1}{3} + 6 = \frac{1}{3} + \frac{18}{3} = \boxed{\frac{19}{3}}.$$

Question 3 Réponse **D.**

$$-9x^2 + 7x + 3 = 3 \iff -9x^2 + 7x = 0 \iff x(-9x + 7) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{7}{9}.$$

Donc $S = \left\{0; \frac{7}{9}\right\}.$

Question 4 Réponse **B.**

$3x - 30 = 0 \iff x = 10$ et $-3x - 6 = 0 \iff x = -2$. En développant, le coefficient de x^2 est $3 \times (-3) = -9 < 0$: le produit est **négalif à l'extérieur des racines** -2 et 10 , positif entre elles.

x	$-\infty$	-2	10	$+\infty$	
signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Vérification : $f(0) = (-30) \times (-6) = 180 > 0$.

Question 5 Réponse **A.**

Après le matin, il reste $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ de la bouteille. À midi, Ursule boit $\frac{1}{4}$ de ce reste :

$$\frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \boxed{\frac{1}{5}} \text{ de la bouteille.}$$

(Au total, matin et midi, elle a donc bu $\frac{2}{5}$ de la bouteille.)

Question 6 Réponse **C.**

$$15^5 = 3^5 \times 5^5, \text{ donc } N = \frac{3^5 \times 5^5}{5^3} = 3^5 \times 5^2. \text{ Or } 27 \times 15^2 = 3^3 \times 3^2 \times 5^2 = 3^5 \times 5^2 :$$

$$\boxed{N = 27 \times 15^2} \quad (= 6\,075).$$

Question 7 Réponse **B.**

Une baisse de 27,5 % correspond au coefficient multiplicateur $1 - 0,275 = 0,725$: prix actuel = prix initial $\times 0,725$. Pour revenir au prix initial, on divise par 0,725, c'est-à-dire qu'on multiplie par $\frac{1}{0,725}$.

Question 8 Réponse **D.**

- Moyennes : $\frac{3+6+7}{3} = \frac{16}{3}$ et $\frac{0,5+9,5+6}{3} = \frac{16}{3}$: elles sont égales.
- Médianes : série A rangée 3 ; 6 ; 7, médiane 6 ; série B rangée 0,5 ; 6 ; 9,5, médiane 6.

Les deux séries ont la même moyenne et la même médiane.

Question 9 Réponse **D.**

Les coefficients multiplicateurs se multiplient : $(1 - 0,40) \times (1 + 0,50) = 0,6 \times 1,5 = 0,9 = 1 - 0,1$. Cela équivaut à une réduction de 10 %.

Question 10 Réponse **C.**

$P(\overline{A}) = \frac{3}{10}$ donc $P(A) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$. Puis

$$P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{7}{50} \times \frac{10}{7} = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad P_A(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Deuxième partie

14 points

Exercice 1 – Partie A

- Augmenter de 1,8 % revient à multiplier par $1 + \frac{1,8}{100} = 1,018$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 1,018 u_n.$$

- On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre : (u_n) est une **suite géométrique** de premier terme $u_0 = 36$ et de raison $q = 1,018$.

- Pour une suite géométrique, $u_n = u_0 \times q^n$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 36 \times 1,018^n.$$

- a. Le premier terme est u_0 , donc le 12^e terme est u_{11} :

$$u_{11} = 36 \times 1,018^{11} \approx 43,81 \quad (\text{colonne B, ligne } n = 11).$$

u_{11} correspond à l'année 2017 + 11 = 2028 : si l'augmentation de 1,8 % par an se poursuit, la consommation mondiale de pétrole en 2028 sera d'environ 43,81 milliards de barils.

b. S_{10} est la somme des 11 premiers termes d'une suite géométrique de raison $1,018 \neq 1$:

$$S_{10} = u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = u_0 \times \frac{1 - q^{11}}{1 - q} = 36 \times \frac{1,018^{11} - 1}{0,018} \approx \boxed{433,64}$$

(colonne C, ligne $n = 10$). De 2017 à 2027 inclus, la consommation mondiale totale de pétrole serait d'environ 433,64 milliards de barils.

5. La quantité totale de pétrole est épuisée dès que la consommation cumulée S_n dépasse 1 697 milliards de barils. Dans la colonne C :

$$S_{33} \approx 1\,668,21 < 1\,697 \quad \text{et} \quad S_{34} \approx 1\,734,24 > 1\,697.$$

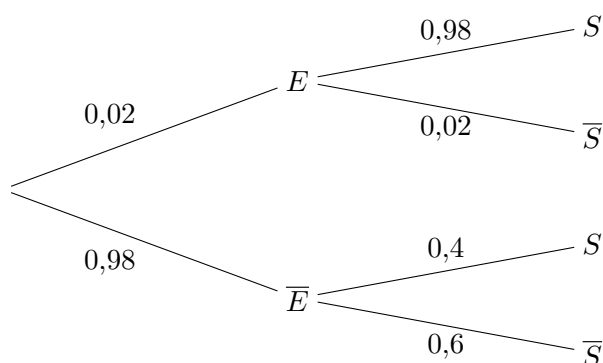
Le pétrole serait donc épuisé au cours de l'année $2017 + 34 = 2051$. L'investissement doit débiter douze ans avant, soit en $2051 - 12 = \boxed{2039}$.

Exercice 1 – Partie B

1. 2 % des automobilistes ont un véhicule électrique, 98 % des propriétaires de véhicules électriques sont satisfaits, et 60 % des propriétaires de véhicules thermiques (événement $\bar{E}$) ne sont pas satisfaits :

$$\boxed{P(E) = 0,02} \quad \boxed{P_E(S) = 0,98} \quad \boxed{P_{\bar{E}}(\bar{S}) = 0,6}.$$

2. On complète avec les probabilités contraires : $P(\bar{E}) = 0,98$, $P_E(\bar{S}) = 0,02$, $P_{\bar{E}}(S) = 0,4$.



3. E et $\bar{E}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(E \cap S) + P(\bar{E} \cap S) = 0,02 \times 0,98 + 0,98 \times 0,4 = 0,0196 + 0,392 = \boxed{0,4116}.$$

4. On cherche $P_S(E)$:

$$P_S(E) = \frac{P(E \cap S)}{P(S)} = \frac{0,0196}{0,4116} \approx \boxed{0,048}.$$

Sachant qu'un automobiliste est satisfait, la probabilité qu'il ait un véhicule électrique est d'environ 0,048 (moins de 5 %).

Exercice 2 – Partie A

1. g est une fonction polynôme, dérivable sur $[-4; 7]$:

$$g'(x) = 2 \times 3x^2 + 12 \times 2x = 6x^2 + 24x = \boxed{6x(x + 4)}.$$

$6x(x+4)$ s'annule en $x = 0$ et en $x = -4$. Sur $[-4; 0]$, $x \leq 0$ et $x+4 \geq 0$, donc $g'(x) \leq 0$; sur $[0; 7]$, $x \geq 0$ et $x+4 > 0$, donc $g'(x) \geq 0$.

x	-4	0	7	
signe de $g'(x)$	0	$-$	0	$+$
variations de g	$g(-4)$	$g(0)$	$g(7)$	

g est décroissante sur $[-4; 0]$ et croissante sur $[0; 7]$.

2. $q(0) = 2 \times 0 + 12 \times 0 + 2 = \boxed{2}$.

D'après le tableau de variations, g admet sur $[-4; 7]$ un minimum atteint en $x = 0$, égal à $g(0) = 2$.

Donc pour tout $x \in [-4; 7], g(x) \geq 2 > 0$: $g(x) > 0$ sur $[-4; 7]$.

Exercice 2 – Partie B

1. $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^3 - 2$, $u'(x) = 3x^2$, $v(x) = x + 4$, $v'(x) = 1$, et $v(x) \neq 0$ sur $] -4; 7]$. Donc f est dérivable sur $] -4; 7]$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{3x^2(x+4) - (x^3-2)}{(x+4)^2} = \frac{3x^3 + 12x^2 - x^3 + 2}{(x+4)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 12x^2 + 2}{(x+4)^2} = \sqrt{\frac{g(x)}{(x+4)^2}}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{2.} \quad f(0) = \frac{0-2}{0+4} = -\frac{1}{2} \text{ et } f'(0) = \frac{g(0)}{4^2} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

$$T_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0) \iff \boxed{y = \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}}.$$

3. Pour tout $x \in]-4; 7]$, $(x + 4)^2 > 0$ et, d'après la partie A, $g(x) > 0$. Donc $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $] -4; 7]$.

x	-4	7
signe de $f'(x)$		$+$
variations de f		 $f(7)$

4. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est horizontale si et seulement si $f'(a) = 0$, c'est-à-dire $g(a) = 0$. Or $g(x) > 0$ pour tout $x \in]-4; 7]$: f' ne s'annule jamais. La courbe $\mathcal{C}_f$ n'admet aucune tangente horizontale sur $]-4; 7]$.