

Question de cours

1 point

Méthode 1 (dénombrement). Soit E un ensemble à n éléments ($n \geq 2$) et a un élément fixé de E . Les parties à k éléments de E (il y en a $\binom{n}{k}$) se répartissent en deux catégories disjointes :

- celles qui contiennent a : on choisit les $k-1$ autres éléments parmi les $n-1$ éléments de $E \setminus \{a\}$, soit $\binom{n-1}{k-1}$ parties;
- celles qui ne contiennent pas a : on choisit les k éléments parmi les $n-1$ éléments de $E \setminus \{a\}$, soit $\binom{n-1}{k}$ parties.

Par le principe additif, $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$.

Méthode 2 (calcul). Pour $1 \leq k \leq n-1$:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)! \times k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)! \times (n-k)}{k!(n-k)!} \quad (\text{même dénominateur}) \\ &= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Exercice 1

4 points

1) Le sac contient 9 jetons ; un tirage simultané de 3 jetons est une combinaison de 3 jetons.

- a. Trois jetons de la même couleur : trois jaunes, $\binom{4}{3} = 4$ façons ; trois rouges, impossible (il n'y en a que 2) ; trois bleus, $\binom{3}{3} = 1$ façon.

Au total $4 + 0 + 1 = 5$ possibilités : réponse (c).

- b. Trois couleurs différentes : un jaune, un rouge et un bleu, soit $4 \times 2 \times 3 = 24$ possibilités (principe multiplicatif) : réponse (d).

Les autres propositions valent $\frac{4!}{2! \times 3!} = 2$, $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10$ et 9 : elles sont fausses.

- 2) a. Deux cartes successivement et sans remise : on compte les 2-listes d'éléments distincts (arrangements) de l'ensemble des 32 cartes, soit $32 \times 31 = 992$: réponse (c).

- b. Les cartes qui ne sont ni un as ni un pique : on retire les 8 piques (dont l'as de pique) et les 3 autres as, il reste $32 - 8 - 3 = 21$ cartes.

Le nombre de tirages simultanés de deux de ces cartes est $\binom{21}{2} = \frac{21 \times 20}{2} = 210$:

réponse (b).

- 3) Écrire un entier de 5 chiffres avec les 5 jetons revient à ranger les 5 jetons dans un ordre : c'est une permutation de 5 éléments. Il y en a $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

réponses (a) et (d) $(5^5 \text{ compterait les répétitions de chiffres, et } \binom{5}{5} = 1)$.

Exercice 2

5 points

Les numéros pairs sont 2, 4, 6, 8, 10, 12 (6 assiettes), les numéros impairs sont 6 assiettes; les assiettes « bleuet » sont 1 à 5 (5 assiettes) et les assiettes « pivoine » sont 6 à 12 (7 assiettes).

- 1) Une issue est une partie à 4 éléments de l'ensemble des 12 assiettes :

$$\text{Card}(E) = \binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \boxed{495}.$$

- 2) • A : on choisit 4 assiettes parmi les 6 paires : $\text{Card}(A) = \binom{6}{4} = \boxed{15}$.
- B : 2 assiettes parmi les 6 paires et 2 parmi les 6 impaires : $\text{Card}(B) = \binom{6}{2} \times \binom{6}{2} = 15 \times 15 = \boxed{225}$.
- C : 4 assiettes parmi les 7 « pivoine » : $\text{Card}(C) = \binom{7}{4} = \boxed{35}$.
- D : 1 assiette parmi les 5 « bleuet » et 3 parmi les 7 « pivoine » : $\text{Card}(D) = 5 \times \binom{7}{3} = 5 \times 35 = \boxed{175}$.
- $F = A \cap C$: 4 assiettes paires et « pivoine », c'est-à-dire parmi $\{6; 8; 10; 12\}$: il n'y a qu'une seule possibilité, $\text{Card}(F) = \binom{4}{4} = \boxed{1}$.
- $G = A \cup C$: $\text{Card}(G) = \text{Card}(A) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap C) = 15 + 35 - 1 = \boxed{49}$.

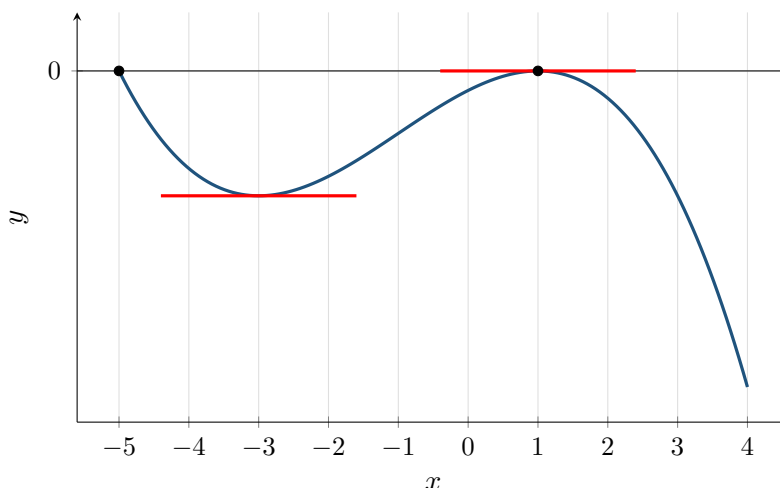
Exercice 3

1 point

Lecture des tableaux :

- f est décroissante sur $[-5; -3]$, croissante sur $[-3; 1]$, décroissante sur $[1; 4]$: elle admet un minimum en -3 (avec $f(-3) < f(-5) = 0$) et un maximum en 1, égal à $f(1) = 0$. Les tangentes horizontales sont aux points d'abscisses -3 et 1; celle au point d'abscisse 1 est l'axe des abscisses.
- $f'' \geq 0$ sur $[-5; -1]$: f est convexe (courbe au-dessus de ses tangentes); $f'' \leq 0$ sur $[-1; 4]$: f est concave. Le point d'abscisse -1 est un point d'inflexion.

Une allure possible ci-dessous. Seules comptent les informations des tableaux : les zéros en -5 et 1, le sens de variation, les tangentes horizontales en -3 et 1, et le changement de convexité en -1 . Les ordonnées des points d'abscisses -3 et -1 ne sont pas connues; on sait seulement que $f(-3) < 0$.



En rouge : les tangentes horizontales aux points d'abscisses -3 et 1 .

Exercice 4

9 points

- 1) En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 1) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty$. Par produit,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}.$$

En $+\infty$: forme indéterminée « $\infty \times 0$ ». Pour tout réel x , $f(x) = x^2 e^{-x} e^1 = e \times \frac{x^2}{e^x}$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ et $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

- 2) $f = uv$ avec $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = e^{-x+1}$, $v'(x) = -e^{-x+1}$. Pour tout réel x :

$$f'(x) = 2x e^{-x+1} - x^2 e^{-x+1} = \boxed{x(2 - x) e^{-x+1}}.$$

Comme $e^{-x+1} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $x(2 - x)$, trinôme de racines 0 et 2, négatif à l'extérieur des racines (coefficient de x^2 égal à -1).

$$f(0) = 0 \text{ et } f(2) = 4e^{-1} = \frac{4}{e}.$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	—	0	+	+
$2 - x$	+	+	0	—
$f'(x)$	—	0	+	—
f	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$		$\frac{4}{e}$ $\searrow$ 0

f est décroissante sur $] -\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; +\infty[$.

3) La tangente au point d'abscisse 4 a pour équation $y = f'(4)(x - 4) + f(4)$, avec

$$f(4) = 16e^{-3} \quad \text{et} \quad f'(4) = 4 \times (2 - 4)e^{-3} = -8e^{-3}.$$

Donc $y = -8e^{-3}(x - 4) + 16e^{-3}$, soit $y = -8e^{-3}x + 48e^{-3}$.

4) a. $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x+1}$. Avec $u(x) = 2x - x^2$, $u'(x) = 2 - 2x$:

$$f''(x) = (2 - 2x)e^{-x+1} - (2x - x^2)e^{-x+1} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x+1}.$$

$f''(x)$ a le signe de $x^2 - 4x + 2$: $\Delta = 16 - 8 = 8 > 0$, racines $x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{2}$; le trinôme est positif à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{2}$	$2 + \sqrt{2}$	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
convexité	convexe		concave		convexe

f est convexe sur $] -\infty ; 2 - \sqrt{2}]$ et sur $[2 + \sqrt{2} ; +\infty[$ et concave sur $[2 - \sqrt{2} ; 2 + \sqrt{2}]$.

b. f'' s'annule en changeant de signe en $2 - \sqrt{2}$ et en $2 + \sqrt{2}$: $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion, d'abscisses $2 - \sqrt{2} \approx 0,59$ et $2 + \sqrt{2} \approx 3,41$.

Leurs ordonnées : $(2 - \sqrt{2})^2 = 6 - 4\sqrt{2}$ et $(2 + \sqrt{2})^2 = 6 + 4\sqrt{2}$, donc

$$\left(2 - \sqrt{2}; (6 - 4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}\right) \quad \text{et} \quad \left(2 + \sqrt{2}; (6 + 4\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}\right),$$

d'ordonnées environ 0,52 et 1,04.