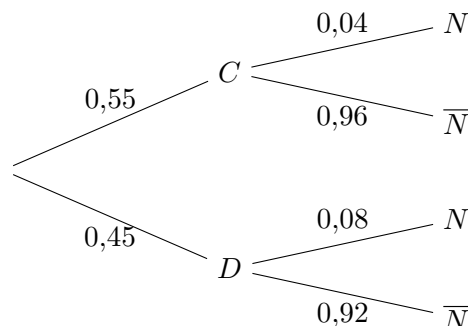


Exercice 1

10 points

Partie A

- 1) a. Arbre pondéré, complété avec les résultats des questions suivantes (les probabilités conditionnelles de l'atelier D sont calculées en 1) d.) :



b. $P(C \cap N) = P(C) \times P_C(N) = 0,55 \times 0,04 = \boxed{0,022}$.

- c. C et D forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(N) = P(C \cap N) + P(D \cap N), \quad \text{donc} \quad P(D \cap N) = 0,058 - 0,022 = \boxed{0,036}.$$

d. $P_D(N) = \frac{P(D \cap N)}{P(D)} = \frac{0,036}{0,45} = \boxed{0,08}$.

Ainsi 8 % des barres de l'atelier D sont non conformes, et $P_D(\bar{N}) = 1 - 0,08 = 0,92$.

2) $P_N(C) = \frac{P(C \cap N)}{P(N)} = \frac{0,022}{0,058} = \frac{11}{29} \approx \boxed{0,3793}$.

Interprétation : environ 37,9 % des barres non conformes proviennent de l'atelier C , alors que cet atelier fournit 55 % de la production : la majorité des défauts (environ 62 %) vient de l'atelier D , sur lequel l'entreprise devrait faire porter ses efforts.

Partie B

- 1) Une barre non conforme fait perdre 1,50 € (gain $-1,5$) et une barre conforme rapporte 0,70 €. D'après la partie A, $P(N) = 0,058$ et $P(\bar{N}) = 0,942$:

x_i	$-1,5$	$0,7$
$P(X = x_i)$	$0,058$	$0,942$

2) $E(X) = -1,5 \times 0,058 + 0,7 \times 0,942 = -0,087 + 0,6594 = \boxed{0,5724}$.

Interprétation : en moyenne, sur un grand nombre de barres, chaque barre rapporte environ 0,57 € à l'entreprise.

Partie C

- 1) a. On répète 180 fois, de façon indépendante, la même épreuve de Bernoulli : examiner une barre, avec pour succès « la barre est non conforme », de probabilité $p = 0,058$. Y compte le nombre de succès, donc Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(180; 0,058)$.

b. $P(Y = 17) = \binom{180}{17} \times 0,058^{17} \times 0,942^{163} \approx 0,0158$.

c. $E(Y) = np = 180 \times 0,058 = 10,44$.

Sur un grand nombre de lots de 180 barres, on compte en moyenne environ 10,44 barres non conformes par lot.

- 2) a. À la calculatrice (probabilités cumulées de la loi $\mathcal{B}(180; 0,058)$) :

$$P(Y \leq 15) \approx 0,9400 < 0,95 \quad \text{et} \quad P(Y \leq 16) \approx 0,9666 \geq 0,95.$$

Comme $P(Y \leq k)$ augmente avec k , le plus petit entier cherché est $a = 16$.

- b. Un lot est accepté lorsque le nombre de barres non conformes appartient à l'intervalle $[0; 16]$; cela se produit pour au moins 95 % des lots issus d'une production habituelle.

- 3) $13 \in [0; 16]$: le nombre de barres non conformes observé est compatible avec les habitudes de production. Le lot est accepté.

Exercice 2

5 points

Partie A

- 1) $g(x)$ existe si et seulement si $f(x) \neq 0$. D'après le tableau, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en $x = 1$.

Donc g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

- 2) a. D'après le tableau : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

- b. Par quotient : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1}{3}$, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1}{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

- 3) a. f est strictement décroissante et $f(1) = 0$, donc $f(x) > 0$ pour $x < 1$ et $f(x) < 0$ pour $x > 1$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

- b. Quand $x \rightarrow 1$ avec $x < 1$, $f(x) \rightarrow 0$ en restant positif; quand $x \rightarrow 1$ avec $x > 1$, $f(x) \rightarrow 0$ en restant négatif. Par quotient :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x) = +\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} g(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de g .

Partie B

- 1) Pour tout $x > 0$, $\sin(x) \geq -1$, donc $x + 2 \sin(x) \geq x - 2$ et, comme $\sqrt{x} > 0$:

$$\frac{x + 2 \sin(x)}{\sqrt{x}} \geq \frac{x - 2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$.

Par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2 \sin(x)}{\sqrt{x}} = +\infty$. La proposition 1 est fausse.

- 2) En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{1 - e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$: la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 - \frac{5}{1} = -3$: la droite d'équation $y = -3$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

En 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x) = 0$; pour $x > 0$, $e^x > 1$ donc $1 - e^x < 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$; pour $x < 0$, $1 - e^x > 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale.

La courbe admet donc trois asymptotes. La proposition 2 est vraie.

Exercice 3

5 points

Partie A

- 1) a. La droite d'équation $y = 200$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$: cela signifie exactement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 200$.

- b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + a e^{-x}) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = K$.

Par unicité de la limite, $K = 200$.

2) a. Le premier janvier ($x = 0$), cinq habitants sont infectés : $f(0) = 5$.

b. $f(0) = \frac{200}{1 + a e^0} = \frac{200}{1 + a}$. Donc

$$\frac{200}{1 + a} = 5 \iff 1 + a = 40 \iff a = 39.$$

Partie B

1) On pose $u(x) = 1 + 39 e^{-x}$: u est dérivable sur $[0 ; +\infty[$, strictement positive, et $u'(x) = -39 e^{-x}$.
 $f = \frac{200}{u}$, donc $f' = -\frac{200 u'}{u^2}$:

$$f'(x) = -\frac{200 \times (-39 e^{-x})}{(1 + 39 e^{-x})^2} = \frac{7800 e^{-x}}{(1 + 39 e^{-x})^2}.$$

2) Pour tout $x \geq 0$, $e^{-x} > 0$ et $(1 + 39 e^{-x})^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$. Avec $f(0) = 5$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 200$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	5	200

3) Le nombre de malades augmente mais reste inférieur à 200 et s'en rapproche avec le temps : selon ce modèle, à long terme environ 200 habitants seront touchés par la maladie, et environ 300 des 500 villageois ne seront jamais infectés.