

Calculatrice autorisée

Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. Le résultat d'une question peut être admis (même s'il n'est pas démontré) pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1**10 points**

Une entreprise livre des barres de céréales produites dans deux ateliers, C et D . Chaque jour, 55 % des barres sont issues de l'atelier C et 45 % de l'atelier D . Dans l'atelier C , 4 % des barres sont non conformes au contrôle qualité. On prélève au hasard une barre de céréales livrée ce jour-là. On note C : « la barre provient de l'atelier C », D : « la barre provient de l'atelier D », N : « la barre est non conforme » et $\bar{N}$: « la barre est conforme ».

Les barres produites sont mélangées dans un stock commun. Au total, 5,8 % des barres de céréales produites par cette entreprise ne sont pas conformes aux normes.

Pour cet exercice, toutes les valeurs seront arrondies, si besoin, à 10^{-4} près.

Partie A

- 1)
 - a. Représenter la situation sous forme d'un arbre qui sera complété au cours de la résolution de l'exercice.
 - b. Calculer la probabilité qu'une barre prélevée provienne de l'atelier C et qu'elle ne soit pas conforme.
 - c. Calculer la probabilité qu'une barre prélevée provienne de l'atelier D et qu'elle ne soit pas conforme.
 - d. En déduire la probabilité qu'une barre prélevée ne soit pas conforme, sachant qu'elle provient de l'atelier D .
- 2) Sachant qu'une barre prélevée est non conforme, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'atelier C ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'entreprise.

Partie B

Chaque barre non conforme coûte 1,50 € à l'entreprise (retour, recyclage, compensation consommateur). Chaque barre conforme procure un bénéfice net moyen de 0,70 €. Soit X la variable aléatoire représentant le gain (en euros) réalisé sur une barre prélevée au hasard.

- 1) Donner la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Interpréter $E(X)$ dans le cadre de l'entreprise.

Partie C

Un lot du jour contient $n = 180$ barres livrées. On suppose l'indépendance des défauts et que la probabilité pour chaque barre d'être non conforme est celle donnée dans la partie A, soit 5,8 %. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de barres non conformes dans le lot.

- 1)
 - a. Justifier que Y suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
 - b. Calculer la probabilité d'avoir exactement 17 barres de céréales non conformes parmi les 180 livrées.
 - c. Calculer l'espérance $E(Y)$ et l'interpréter.
- 2) On accepte le lot si le nombre de barres non conformes reste compatible avec les habitudes de production.
 - a. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier a tel que $P(Y \leq a) \geq 0,95$.

- b. On décide d'accepter un lot lorsque le nombre de barres non conformes est inférieur ou égal à a . En déduire un intervalle pour un nombre « acceptable » de barres non conformes.
- 3) Dans un lot, on trouve 13 barres non conformes sur 180. Conclure, en s'appuyant sur la question précédente, quant à la conformité du lot.

Exercice 2

5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

On définit la fonction g par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	3	0	$-\infty$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de g .
- 2)
 - a. Donner les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - b. En déduire les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 3)
 - a. Dresser le tableau de signes de $f(x)$.
 - b. En déduire les limites de g en 1, à gauche et à droite.

Partie B

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en les justifiant. Toute réponse non justifiée ne rapportera pas de point. Les deux questions sont indépendantes.

- 1) **Proposition 1 :** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2 \sin(x)}{\sqrt{x}} = 0$.
- 2) **Proposition 2 :** la courbe représentative de la fonction f définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2 - \frac{5}{1 - e^x}$ admet trois asymptotes.

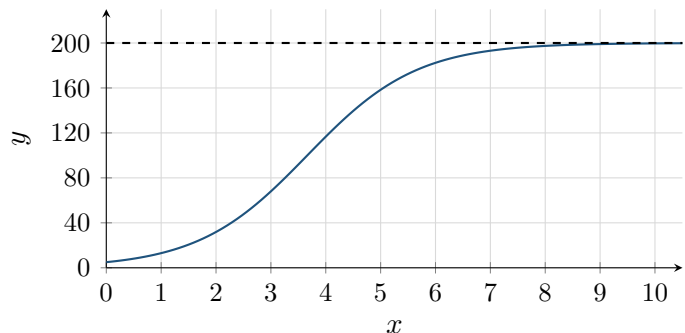
Exercice 3

5 points

Le premier janvier, on constate que cinq habitants d'un village de 500 habitants sont infectés par un virus. Puis, le virus se propage. À l'aide d'observations effectuées, on remarque que la fonction qui modélise le nombre d'habitants malades à partir du premier janvier en fonction du temps, en jours, est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{K}{1 + a e^{-x}}$, où a et K sont deux nombres réels à déterminer. On remarque que la droite d'équation $y = 200$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f , représentée ci-contre.

Partie A

- 1) a. Expliquer pourquoi on peut affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 200$.
b. En déduire la valeur du coefficient K .
- 2) a. Déterminer la valeur de $f(0)$.
b. En déduire la valeur du coefficient a .



Partie B

Pour la suite de l'exercice, on admet que le nombre d'habitants malades en fonction du temps peut être modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{200}{1 + 39 e^{-x}}$, où x représente le nombre de jours écoulés depuis le premier janvier et $f(x)$ le nombre d'habitants touchés par la maladie.

- 1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Justifier que $f'(x) = \frac{7800 e^{-x}}{(1 + 39 e^{-x})^2}$.
- 2) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
- 3) Quel commentaire concernant les villageois pouvez-vous faire du résultat obtenu à la question 1) a. de la partie A ?