

## Exercice 1

6 points

1)  $X$  ne prend que des valeurs entières, donc

$$P(45 \leq X \leq 55) = P(X \leq 55) - P(X \leq 44) \approx 0,9991 - 0,8211.$$

À la calculatrice (fonction de répartition de la loi  $\mathcal{B}(100; 0,4)$ ) :  $P(45 \leq X \leq 55) \approx 0,178$ .

2)  $P(X = 0) = \binom{3}{0} p^0 (1-p)^3 = (1-p)^3$ . Comme  $p \in [0; 1]$  :

$$(1-p)^3 = \frac{1}{125} \iff 1-p = \frac{1}{5} \iff p = \frac{4}{5},$$

car la fonction cube est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $(\frac{1}{5})^3 = \frac{1}{125}$ . Donc  $p = 0,8$ .

3) a. Pour  $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ ,  $V(X) = np(1-p)$ . Ici  $n = 100$  :  $f(p) = 100p(1-p)$  est la variance  $V(X)$  de  $X$ .

b.  $f(p) = 100p - 100p^2$  est dérivable sur  $[0; 1]$  et  $f'(p) = 100 - 200p = 100(1 - 2p)$ .  
 $f'(p) > 0$  sur  $[0; \frac{1}{2}[$  et  $f'(p) < 0$  sur  $]\frac{1}{2}; 1]$  :  $f$  est croissante sur  $[0; \frac{1}{2}]$  puis décroissante sur  $[\frac{1}{2}; 1]$ .

|         |   |               |   |
|---------|---|---------------|---|
| $p$     | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| $f'(p)$ | + | 0             | - |
| $f$     | 0 | 25            | 0 |

$f$  atteint son maximum pour  $p = \frac{1}{2}$ , et ce maximum vaut  $f(\frac{1}{2}) = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$ .

c. La variance mesure la dispersion des valeurs de  $X$  autour de son espérance.

La dispersion de  $X$  est la plus grande lorsque  $p = \frac{1}{2}$

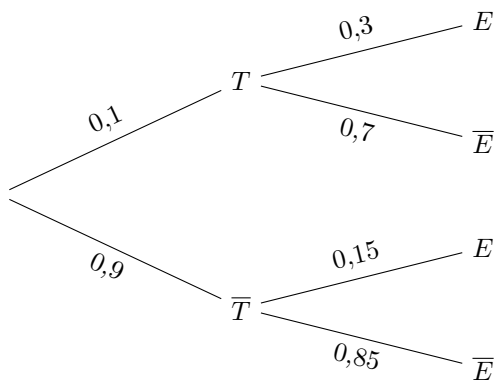
La variance vaut alors 25 et l'écart-type  $\sigma(X) = \sqrt{25} = 5$ .

## Exercice 2

8 points

### Partie A

1) D'après l'énoncé :  $P(T) = 0,1$ ,  $P_T(E) = 0,3$  et  $P_{\bar{T}}(\bar{E}) = 0,85$ , donc  $P_{\bar{T}}(E) = 0,15$ .



$$P(\bar{T} \cap E) = P(\bar{T}) \times P_{\bar{T}}(E) = 0,9 \times 0,15 = \boxed{0,135}.$$

2)  $T$  et  $\bar{T}$  forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(T \cap E) + P(\bar{T} \cap E) = 0,1 \times 0,3 + 0,135 = 0,03 + 0,135 = \boxed{0,165}.$$

3)

$$P_E(T) = \frac{P(T \cap E)}{P(E)} = \frac{0,03}{0,165} = \frac{2}{11} \approx \boxed{0,18}.$$

### Partie B

1) On répète 15 fois, de façon indépendante, la même épreuve de Bernoulli : un contrôle, dont le succès « une erreur est détectée » a pour probabilité  $p = 0,165$ .  $X$  compte le nombre de succès, donc  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(15; 0,165)$ .

2)

$$P(X = 5) = \binom{15}{5} \times 0,165^5 \times 0,835^{10} \approx \boxed{0,06}.$$

3)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,835^{15} \approx \boxed{0,93}.$$

4) Avec  $n$  contrôles, le nombre d'erreurs détectées suit la loi  $\mathcal{B}(n; 0,165)$  et la probabilité d'au moins une erreur vaut  $1 - 0,835^n$ .

$$1 - 0,835^n > 0,99 \iff 0,835^n < 0,01$$

$$\iff n \ln(0,835) < \ln(0,01) \quad (\ln \text{ strictement croissante})$$

$$\iff n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \quad (\text{on divise par } \ln(0,835) < 0)$$

Or  $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \approx 25,5$ . Vérification :  $1 - 0,835^{25} \approx 0,9890$  et  $1 - 0,835^{26} \approx 0,9908$ .

La caisse doit déclencher au moins 26 contrôles par jour.

### Exercice 3

6 points

1) L'équation s'écrit  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , et  $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ . Pour tout réel  $x$  :

$$\begin{aligned}\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \iff 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 3x - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff 3x = \pi + 2k\pi \text{ ou } 3x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

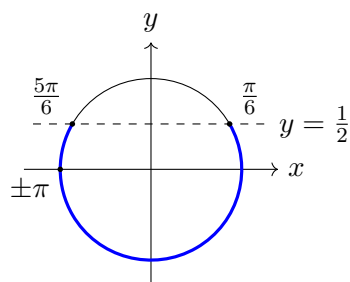
Sur  $\mathbb{R}$  :  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}; -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Dans  $]0; \pi]$  :

- $\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$  :  $k = 0$  donne  $\frac{\pi}{3}$ ,  $k = 1$  donne  $\pi$  ( $k = -1$  donne  $-\frac{\pi}{3}$ ,  $k = 2$  donne  $\frac{5\pi}{3}$  : exclus);
- $-\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$  :  $k = 1$  donne  $\frac{4\pi}{9}$  ( $k = 0$  donne  $-\frac{2\pi}{9}$ ,  $k = 2$  donne  $\frac{10\pi}{9}$  : exclus).

$$\mathcal{S}_{]0; \pi]} = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{9}; \pi \right\}.$$

2) Sur  $[-\pi; \pi]$ ,  $\sin(x) = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6}$  ou  $x = \frac{5\pi}{6}$ . Sur le cercle trigonométrique, les points dont l'ordonnée est inférieure ou égale à  $\frac{1}{2}$  sont ceux de l'arc situé sous la droite  $y = \frac{1}{2}$  :



$$\mathcal{S} = \left[ -\pi; \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{6}; \pi \right].$$

3) On pose  $u(x) = \frac{1}{x}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  avec  $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ . Comme  $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$  :

$$f'(x) = -2 \times (-u'(x) \sin(u(x))) = 2 \times \left( -\frac{1}{x^2} \right) \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{2}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^*.$$