

Calculatrice autorisée

Toutes les réponses doivent être justifiées et clairement rédigées.

Exercice 1

6 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- 1) Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,4)$. Calculer $P(45 \leq X \leq 55)$.
- 2) Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(3; p)$. On sait que $P(X = 0) = \frac{1}{125}$. Que vaut p ?
- 3) Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(100; p)$.
 - a. À quoi correspond la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(p) = 100p(1 - p)$ pour la variable aléatoire X ?
 - b. En étudiant les variations de f sur $[0; 1]$, déterminer la valeur de p pour laquelle f atteint son maximum.
 - c. Interpréter le résultat de la question b.

Exercice 2

8 points

Cet exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Un magasin est équipé de caisses automatiques en libre-service où le client scanne lui-même ses articles. Le logiciel d'une caisse déclenche régulièrement des demandes de vérification. Un employé du magasin effectue alors un contrôle.

Partie A

Le contrôle peut être :

- soit « total » : l'employé du magasin scanne alors à nouveau l'ensemble des articles du client ;
- soit « partiel » : l'employé choisit alors un ou plusieurs articles du client pour vérifier qu'ils ont bien été scannés.

Si un contrôle est déclenché, il s'agit dans un cas sur dix d'un contrôle total. Lorsqu'un contrôle total est déclenché, une erreur du client est détectée dans 30 % des cas. Lorsqu'un contrôle partiel est effectué, dans 85 % des cas, il n'y a pas d'erreur.

Un contrôle est déclenché à une caisse automatique. On considère les événements suivants :

- T : « le contrôle est un contrôle total » ;
- E : « une erreur est détectée lors du contrôle ».

- 1) Construire un arbre pondéré représentant la situation puis déterminer $P(\overline{T} \cap E)$.
- 2) Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.
- 3) Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée. On donnera la valeur arrondie au centième.

Partie B

Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0,165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

- 1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
- 2) Déterminer la probabilité qu'exactly 5 erreurs soient détectées. On donnera la valeur arrondie au centième.
- 3) Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée. On donnera la valeur arrondie au centième.
- 4) On souhaite modifier le nombre de contrôles déclenchés par la caisse de manière à ce que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %. Déterminer le nombre de contrôles que doit déclencher la caisse chaque jour pour que cette contrainte soit respectée.

Exercice 3**6 points**

- 1) Résoudre sur $\mathbb{R}$, puis dans l'intervalle $]0 ; \pi]$, l'équation $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.
- 2) Résoudre dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ l'inéquation $\sin(x) \leq \frac{1}{2}$.
- 3) Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.