

Exercice 1

7 points

1) Pour tout entier naturel n , $u_n = 2025 q^n$ avec $0 < q < 1$, donc $\ln(q) < 0$.

$$\begin{aligned} u_n < 2024 &\iff q^n < \frac{2024}{2025} && \text{(on divise par } 2025 > 0) \\ &\iff n \ln(q) < \ln\left(\frac{2024}{2025}\right) && \text{(la fonction } \ln \text{ est strictement croissante)} \\ &\iff n > \frac{\ln\left(\frac{2024}{2025}\right)}{\ln(1 - 10^{-10})} && \text{(on divise par } \ln(q) < 0) \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln\left(\frac{2024}{2025}\right)}{\ln(1 - 10^{-10})} \approx 4\,939\,491,3$.

Les termes de la suite sont inférieurs à 2024 à partir du rang $n = 4\,939\,492$.

Contrôle : $\ln(1 - 10^{-10}) \approx -10^{-10}$, d'où $n > 10^{10} \ln\left(\frac{2025}{2024}\right) \approx 4\,939\,491$: même ordre de grandeur, la raison très proche de 1 explique ce rang énorme.

2) On utilise $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$ et $\ln(a^n) = n \ln(a)$:

$$(2\sqrt{2} + 1)(2\sqrt{2} - 1) = (2\sqrt{2})^2 - 1^2 = 8 - 1 = 7,$$

$$4 \ln(2\sqrt{2} + 1) + 4 \ln(2\sqrt{2} - 1) - 5 \ln(49) = 4 \ln(7) - 5 \ln(7^2) = 4 \ln(7) - 10 \ln(7) = \boxed{-6 \ln(7)}.$$

3) **Faux.** Pour $x > \frac{3}{2}$, on a $1 - x < 0$: le nombre $\ln(1 - x)$ n'existe pas, donc le membre de droite n'est pas défini.

Ce qui est vrai : pour $x > \frac{3}{2}$, $2x - 3 > 0$ et $\sqrt{(1 - x)^2} = |1 - x| = x - 1 > 0$, donc

$$\ln \sqrt{\frac{2x - 3}{(1 - x)^2}} = \frac{1}{2} \ln(2x - 3) - \ln(x - 1).$$

4) a. Pour tout réel x :

$$e^{4x-2} = 4 \iff 4x - 2 = \ln(4) \iff x = \frac{2 + 2 \ln(2)}{4} \iff x = \frac{1 + \ln(2)}{2}.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1 + \ln(2)}{2} \right\}.$$

b. Conditions d'existence : $3 - 2x > 0$ et $2x - 1 > 0$, soit $x \in \left] \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right[$. Sur cet intervalle :

$$\begin{aligned} \ln(3 - 2x) - 2 &= \ln(2x - 1) \iff \ln(3 - 2x) - \ln(2x - 1) = 2 \\ &\iff \ln\left(\frac{3 - 2x}{2x - 1}\right) = 2 \\ &\iff 3 - 2x = e^2(2x - 1) \\ &\iff 3 + e^2 = x(2 + 2e^2) \\ &\iff x = \frac{3 + e^2}{2(1 + e^2)}. \end{aligned}$$

Ce nombre ($\approx 0,62$) est bien dans $\left] \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right[: 3 + e^2 > 1 + e^2$ et $3 + e^2 < 3 + 3e^2$.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3 + e^2}{2 + 2e^2} \right\}.$$

c. Conditions : $x > 0$ et $\ln(x) \neq 0$, soit $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$. On pose $X = \ln(x)$, $X \neq 0$:

$$X - \frac{1}{X} > \frac{2}{5} \iff \frac{5X^2 - 2X - 5}{5X} > 0.$$

Le trinôme $5X^2 - 2X - 5$ a pour discriminant $\Delta = 4 + 100 = 104 = 4 \times 26 > 0$; ses racines sont

$$X_1 = \frac{2 - 2\sqrt{26}}{10} = \frac{1 - \sqrt{26}}{5} \approx -0,820 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1 + \sqrt{26}}{5} \approx 1,220.$$

Comme $\sqrt{26} > 1$, on a $X_1 < 0 < X_2$.

X	$-\infty$	X_1	0	X_2	$+\infty$	
$5X^2 - 2X - 5$	+	0	-	-	0	+
$5X$	-	-	0	+	+	+
quotient	-	0	+	-	0	+

Donc $X \in \left] \frac{1 - \sqrt{26}}{5}; 0 \right[\cup \left] \frac{1 + \sqrt{26}}{5}; +\infty \right[$, c'est-à-dire $\frac{1 - \sqrt{26}}{5} < \ln(x) < 0$ ou $\ln(x) > \frac{1 + \sqrt{26}}{5}$. La fonction exponentielle étant strictement croissante :

$$\mathcal{S} = \left] e^{\frac{1 - \sqrt{26}}{5}}; 1 \right[\cup \left] e^{\frac{1 + \sqrt{26}}{5}}; +\infty \right[.$$

Valeurs approchées : $e^{\frac{1 - \sqrt{26}}{5}} \approx 0,441$ et $e^{\frac{1 + \sqrt{26}}{5}} \approx 3,387$, soit $\mathcal{S} \approx]0,441; 1[\cup]3,387; +\infty[$.

5) Ensemble de définition. Il faut $x > 0$ et $1 - \ln^2(x) \neq 0$, c'est-à-dire $\ln(x) \neq 1$ et $\ln(x) \neq -1$:

$$\mathcal{D}_f = \left] 0; e^{-1} \right[\cup \left] e^{-1}; e \right[\cup \left] e; +\infty \right[.$$

On écrit $1 - \ln^2(x) = (1 - \ln(x))(1 + \ln(x))$.

En 0. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln^2(x)) = -\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

En e^{-1} . $\lim_{x \rightarrow e^{-1}} x \ln(x) = -e^{-1} < 0$; $1 - \ln(x) \rightarrow 2$ et $1 + \ln(x) \rightarrow 0$, avec $1 + \ln(x) > 0$ pour $x > e^{-1}$ et < 0 pour $x < e^{-1}$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow e^{-1}, x < e^{-1}} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow e^{-1}, x > e^{-1}} f(x) = -\infty.$$

En e . $\lim_{x \rightarrow e} x \ln(x) = e > 0$; $1 + \ln(x) \rightarrow 2$ et $1 - \ln(x) \rightarrow 0$, avec $1 - \ln(x) > 0$ pour $x < e$ et < 0 pour $x > e$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow e, x < e} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow e, x > e} f(x) = -\infty.$$

En $+\infty$. Pour $x > e$, $\ln(x) \neq 0$ et

$$f(x) = \frac{x \ln(x)}{\ln^2(x) \left(\frac{1}{\ln^2(x)} - 1 \right)} = \frac{x}{\ln(x)} \times \frac{1}{\frac{1}{\ln^2(x)} - 1}.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$ (croissances comparées) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln^2(x)} - 1 \right) = -1$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Exercice 2

6 points

1) $f(x)$ existe si et seulement si $1 - 2x \neq 0$ et $\frac{2x+1}{1-2x} > 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$1 - 2x$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{2x+1}{1-2x}$	$-$	0	$+$	$-$

$$\text{Donc } \mathcal{D}_f = \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right[.$$

2) $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f(-x) = \ln \left(\frac{1-2x}{1+2x} \right) = \ln \left(\left(\frac{2x+1}{1-2x} \right)^{-1} \right) = -\ln \left(\frac{2x+1}{1-2x} \right) = -f(x).$$

Donc f est impaire.

3) En $-\frac{1}{2} : 2x + 1 \rightarrow 0^+$ et $1 - 2x \rightarrow 2$, donc $\frac{2x+1}{1-2x} \rightarrow 0^+$; comme $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$, par composition $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = -\infty$.

En $\frac{1}{2} : 2x + 1 \rightarrow 2$ et $1 - 2x \rightarrow 0^+$, donc $\frac{2x+1}{1-2x} \rightarrow +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = +\infty$ (cohérent avec l'imparité).

4) Sur $\mathcal{D}_f$, $2x + 1 > 0$ et $1 - 2x > 0$, donc $f(x) = \ln(2x + 1) - \ln(1 - 2x)$ et

$$f'(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{-2}{1-2x} = \frac{2(1-2x) + 2(2x+1)}{(2x+1)(1-2x)} = \frac{4}{1-4x^2}.$$

Sur $\mathcal{D}_f$, $1 - 4x^2 = (1 - 2x)(1 + 2x) > 0$, donc $f'(x) > 0$: f est strictement croissante. De plus $f(0) = \ln(1) = 0$.

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

5) $f'(x) = 4(1 - 4x^2)^{-1}$, donc

$$f''(x) = -4 \times (-8x) (1 - 4x^2)^{-2} = \frac{32x}{(1 - 4x^2)^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif : $f''(x)$ a le signe de x .

f est concave sur $]-\frac{1}{2}; 0]$ et convexe sur $[0; \frac{1}{2}[$; le point $O(0; 0)$ est un point d'inflexion de la courbe.

Exercice 3

7 points

Partie A : une inégalité

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) \ln(1-x) = 1 \times \ln(1) = 0$.
Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$: f est continue en 0.

- 2) Pour $x \in]0; 1[$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\ln(x) - (1-x) \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

On sait que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ (nombre dérivé de ln en 1); avec $h = -x$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$,

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln(x)) = +\infty$, le taux d'accroissement tend vers $+\infty$.

Donc f n'est pas dérivable en 0; la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente verticale à l'origine.

- 3) Pour $x \in]0; 1[, x > 0$ et $1-x > 0$:

$$\ln(1-x) - \ln(x) > 0 \iff \ln(1-x) > \ln(x) \iff 1-x > x \iff x < \frac{1}{2}.$$

$$\mathcal{S} = \left] 0; \frac{1}{2} \right[.$$

- 4) Sur $]0; 1[, x \mapsto x \ln(x)$ est dérivable (produit) et $x \mapsto (1-x) \ln(1-x)$ aussi ($1-x > 0$, composée puis produit); donc f est dérivable sur $]0; 1[$ et

$$f'(x) = -\left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) - \left(-\ln(1-x) + (1-x) \times \frac{-1}{1-x}\right) = -\ln(x) - 1 + \ln(1-x) + 1,$$

$$f'(x) = \ln(1-x) - \ln(x).$$

- 5) D'après 3), $f'(x) > 0$ sur $]0; \frac{1}{2}[$, $f'(x) < 0$ sur $\frac{1}{2}; 1[$ (inégalités renversées) et $f'(\frac{1}{2}) = 0$ (f' n'est pas définie en 0 et en 1).

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2).$$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$		+	-
f	0	$\ln(2)$	0

6) Pour tout $x \in [0; 1]$, $1 - x \in [0; 1]$. Pour $x \in]0; 1[$:

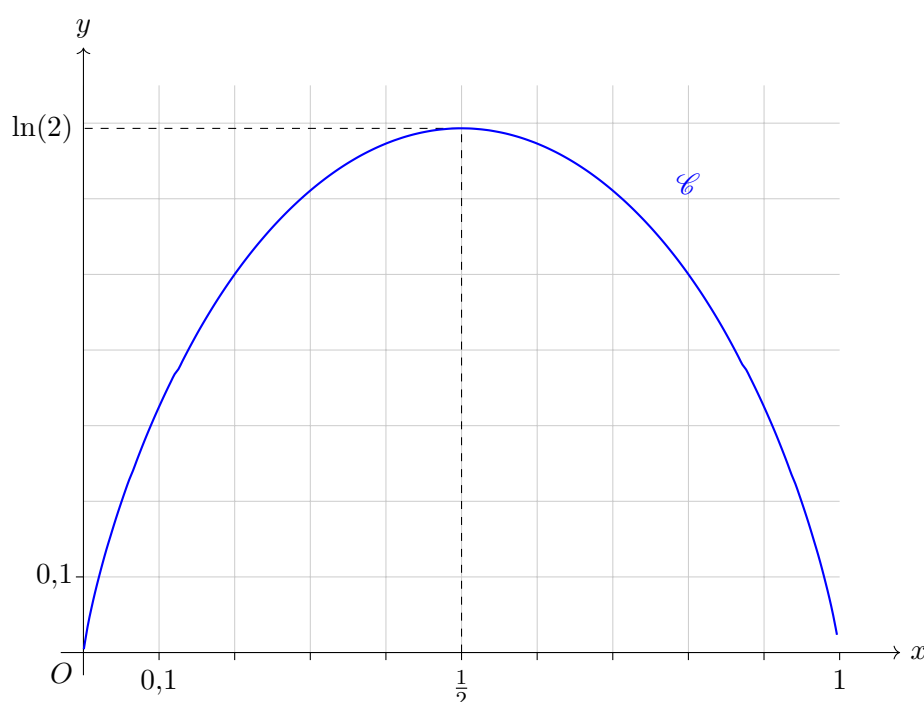
$$f(1-x) = -(1-x) \ln(1-x) - (1 - (1-x)) \ln(1 - (1-x)) = -(1-x) \ln(1-x) - x \ln(x) = f(x),$$

$$\text{et } f(1-0) = f(1) = 0 = f(0), f(1-1) = f(0) = f(1).$$

Les points $M(x; f(x))$ et $M'(1-x; f(x))$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ (milieu d'abscisse $\frac{1}{2}$, même ordonnée) :

la droite $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$.

7) Tangentes : verticales en O et en $(1; 0)$ (par symétrie), horizontale au sommet $(\frac{1}{2}; \ln(2))$, avec $\ln(2) \approx 0,69$.



8) Si $a > 0$, $b > 0$ et $a + b = 1$, alors $a \in]0; 1[$ et $b = 1 - a$. Comme $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$:

$$a \ln\left(\frac{1}{a}\right) + b \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -a \ln(a) - (1-a) \ln(1-a) = f(a).$$

D'après le tableau de variations, le maximum de f sur $[0; 1]$ est $\ln(2)$, atteint uniquement en $\frac{1}{2}$ (stricte monotonie de part et d'autre). Donc

$$\boxed{a \ln\left(\frac{1}{a}\right) + b \ln\left(\frac{1}{b}\right) \leq \ln(2)}, \quad \text{avec égalité si et seulement si } \boxed{a = b = \frac{1}{2}}.$$

Partie B : généralisation

1) Soit g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(t) = \ln(t) - t + 1$. g est dérivable et $g'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$.

Sur $]0; 1]$, $g'(t) \geq 0$: g est strictement croissante; sur $[1; +\infty[$, $g'(t) \leq 0$: g est strictement décroissante. Son maximum est $g(1) = 0$.

Donc pour tout $t > 0$, $g(t) \leq 0$, soit $\ln(t) \leq t - 1$, et par stricte monotonie $g(t) < 0$ pour $t \neq 1$: l'inégalité est stricte pour tout $t \neq 1$ (égalité seulement pour $t = 1$).

2) On applique 1) à $t = \frac{1}{p a_k} > 0$:

$$\ln\left(\frac{1}{p a_k}\right) \leq \frac{1}{p a_k} - 1,$$

puis on multiplie par $a_k > 0$: $a_k \ln\left(\frac{1}{p a_k}\right) \leq \frac{1}{p} - a_k$.

Il y a égalité si et seulement si $t = 1$, c'est-à-dire $p a_k = 1$, soit $a_k = \frac{1}{p}$.

3) Pour tout k , $\ln\left(\frac{1}{p a_k}\right) = \ln\left(\frac{1}{a_k}\right) - \ln(p)$, donc

$$\sum_{k=1}^p a_k \ln\left(\frac{1}{p a_k}\right) = \sum_{k=1}^p a_k \ln\left(\frac{1}{a_k}\right) - \ln(p) \sum_{k=1}^p a_k = H_p - \ln(p) \times 1 = H_p - \ln(p).$$

4) On additionne les p inégalités de la question 2) :

$$H_p - \ln(p) = \sum_{k=1}^p a_k \ln\left(\frac{1}{p a_k}\right) \leq \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{p} - a_k\right) = p \times \frac{1}{p} - \sum_{k=1}^p a_k = 1 - 1 = 0.$$

Donc $H_p \leq \ln(p)$.

5) Pour chaque k , posons $d_k = \left(\frac{1}{p} - a_k\right) - a_k \ln\left(\frac{1}{p a_k}\right) \geq 0$. On a $\ln(p) - H_p = d_1 + d_2 + \dots + d_p$. Une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun est nul ; d'après 2),

$$d_k = 0 \iff a_k = \frac{1}{p}.$$

Donc $H_p = \ln(p)$ si et seulement si $a_1 = a_2 = \dots = a_p = \frac{1}{p}$ (et l'on a bien $\sum a_k = 1$). Pour $p = 2$,

on retrouve $a = b = \frac{1}{2}$ de la partie A.