

Calculatrice autorisée

La présentation et la rédaction devront être soignées.

Exercice 1

7 points

Les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

- 1) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2025$ et de raison $q = 1 - 10^{-10}$. Déterminer, par le calcul, à partir de quel rang les termes de cette suite deviennent inférieurs à 2024.
- 2) Simplifier : $4 \ln(2\sqrt{2} + 1) + 4 \ln(2\sqrt{2} - 1) - 5 \ln(49)$.
- 3) **Vrai ou faux ?** Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$,

$$\ln \sqrt{\frac{2x-3}{(1-x)^2}} = \frac{1}{2} \ln(2x-3) - \ln(1-x).$$

- 4) Résoudre dans $\mathbb{R}$:
 - a. $e^{4x-2} = 4$;
 - b. $\ln(3-2x) - 2 = \ln(2x-1)$;
 - c. $\ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} > \frac{2}{5}$.
- 5) Soit $f : x \mapsto \frac{x \ln(x)}{1 - \ln^2(x)}$. Déterminer son ensemble de définition puis étudier les limites aux bornes de celui-ci.

Exercice 2

6 points

Soit $f : x \mapsto \ln\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right)$.

- 1) Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
- 2) Montrer que f est une fonction impaire.
- 3) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 4) Calculer la dérivée de f , puis dresser le tableau de variations de f .
- 5) Étudier la convexité de f .

Exercice 3

7 points

Partie A : une inégalité

Soit f la fonction définie sur $]0; 1[$ par

$$\begin{cases} f(x) = -x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x) & \text{pour tout } x \in]0; 1[\\ f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 10 cm).

- 1) f est-elle continue en 0 ?
- 2) f est-elle dérivable en 0 ?
- 3) Résoudre, dans $]0; 1[$, l'inéquation $\ln(1-x) - \ln(x) > 0$.
- 4) Justifier que f est dérivable sur $]0; 1[$, puis calculer sa dérivée.
- 5) Dresser le tableau de variations de f .
- 6) Montrer que $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ comme axe de symétrie.
- 7) Construire $\mathcal{C}$.
- 8) Soit a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a + b = 1$.
Montrer que $a \ln\left(\frac{1}{a}\right) + b \ln\left(\frac{1}{b}\right) \leq \ln(2)$. Pour quelles valeurs de a et b obtient-on une égalité ?

Partie B : généralisation

Soit p un entier strictement supérieur à 1 et soit $a_1, a_2, \dots, a_p$ des nombres réels strictement positifs tels que $a_1 + a_2 + \dots + a_p = 1$ (ce que l'on note $\sum_{k=1}^p a_k = 1$). On pose $H_p = \sum_{k=1}^p a_k \ln\left(\frac{1}{a_k}\right)$.

- 1) Montrer que pour tout réel t strictement positif, on a $\ln(t) \leq t - 1$.
Pour quelles valeurs de t cette inégalité est-elle stricte ?
- 2) Montrer que pour tout entier k compris entre 1 et p , on a $a_k \ln\left(\frac{1}{p a_k}\right) \leq \frac{1}{p} - a_k$, avec égalité si, et seulement si, $a_k = \frac{1}{p}$.
- 3) Montrer que $H_p - \ln(p) = \sum_{k=1}^p a_k \ln\left(\frac{1}{p a_k}\right)$.
- 4) En déduire que $H_p \leq \ln(p)$.
- 5) Déterminer $a_1, a_2, \dots, a_p$ pour que cette inégalité soit une égalité.